





33-5-10

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio  



Palchetto 

Num.° d'ordine 


NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

2601

NAPOLI

B. Prov

I
2601



ELÉMENS
DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET
DE CALCUL INTÉGRAL.

*Ouvrages du même Auteur qui se trouvent chez le même
Libraire.*

**THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND
ORDRE**, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analy-
tique, seconde édit., augmentée, in-8°, 1810, 5 fr. pour Paris, et 6 fr. 50 c.
par la Poste.

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE, in-8°, avec planches, 1815, 6 fr. pour
Paris, et 7 fr. 50 c. par la Poste.

608830

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR J.-L. BOUCHARLAT,

Docteur ès-Sciences, Membre de la Société Philotechnique,
de la Société Royale académique des Sciences, de l'Athénée
des Arts, et des Académies de Rouen, de Bordeaux, de
Nismes, etc.

SECONDE ÉDITION,
CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.



PARIS,

M^{me} V^e COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Rue du Jardin-Saint-André-des-Arcs.

1820.

122870

LIBRAIRIE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA MARINE ET LES
SCIENCES EN GÉNÉRAL.

EXTRAIT DU CATALOGUE

*Des Livres qui se trouvent chez BACHELIER (successeur de M^{me} veuve
COURCIER), libraire, quai des Augustins, n° 55.*

OUVRAGES ADOPTÉS PAR L'UNIVERSITÉ DE FRANCE, POUR L'ENSEIGNEMENT DANS LES COLLÈGES, etc., etc.

*Ouvrages de M. LACROIX, Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur,
Doyen des Sciences à l'Université, Professeur au Collège de France, etc.*

COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-
Nations. Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Ecoles secon-
daires, Collèges, etc., 9 vol. in-8., 38 fr. 50 c.

Chaque volume du Cours de M. LACROIX se vend séparément, savoir :

Traité élémentaire d'Arithmétique, 16 ^e édition, 1823,	3 fr.
Elémens d'Algèbre, 13 ^e édition, 1820,	4 fr.
Elémens de Géométrie, 12 ^e édition, 1822,	4 fr.
Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 7 ^e édition, 1822,	4 fr.
Complément des Elémens d'Algèbre, 4 ^e édition, 1817,	4 fr.
Complément des Elémens de Géométrie, ou Elémens de Géométrie descriptive, 5 ^e édition, 1822,	3 fr.
Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 3 ^e édition, 1820,	7 fr. 50 c.
Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 volume in-8., seconde édition, revue et augmentée, 1816,	5 fr.
TRAITE ÉLÉMENTAIRE DU CALCUL DES PROBABILITÉS , in-8., 2 ^e édition, 1822, avec une planche,	5 fr.
TRAITE COMPLET DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL , 3 vol. in-4.,	66 fr.

L'Introduction de l'Essai sur l'enseignement traite de la culture des Mathéma-
tiques pendant le 18^e siècle, et de leur influence sur la marche de l'esprit humain
dans cet intervalle. Il est terminé par l'analyse de toutes les parties du Cours de
l'Auteur, et l'indication de la marche qu'il a suivie dans ses leçons publiques. Il
s'est proposé de réunir dans un même cadre tout ce qu'il y a de plus important et
de plus précis sur la philosophie des Sciences mathématiques.

Le *Traité élémentaire d'Arithmétique*, les *Elémens d'Algèbre*, qui ne con-
tiennent que les principes et les méthodes d'une application usuelle, les *Elémens*
de *Géométrie*, où l'Auteur a tâché de concilier les rigueurs des démonstrations
avec l'ordre naturel des propositions; et le *Traité élémentaire de Trigonométrie*
et d'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, composent un Cours élémentaire
après lequel on peut passer immédiatement au *Traité de calcul différentiel et de*
calcul intégral. L'Auteur a évité l'emploi des formules de l'Algèbre supérieure
afin de ne pas retarder l'entrée des Elèves dans la Mécanique et ses applications,
qui sont ordinairement le but principal de l'étude des Mathématiques. Il n'a
cessé, à chaque édition, de perfectionner les détails de ses ouvrages et de veiller
à leur correction.

BIOT, Membre de l'Institut, professeur au Collège de France, etc. **TRAITE**
ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement
dans les Collèges, etc., 3 vol. in-8., 1810, 25 fr.

BIOT, PHYSIQUE MÉCANIQUE, traduite de l'allemand de Fischer, avec notes, 3^e édition, considérablement augmentée, 1819, in-8., avec figures, 6 fr.

— ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, in-8., avec 10 pl., 1823, 6^e éd., rev. corr. et augm. 6 f. 50 c.

BEZOUT. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage de la Marine et de l'Artillerie, avec des Notes fort étendues et des Tables de logarithmes, pour les Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique; par A.-A.-L. REYNAUD, Examinateur des Candidats à l'Ecole Polytechnique, etc., in-8., 11^e édit. 1823, 3 fr.
Le texte pur se vend séparément, 2 fr.

Les Notes se vendent aussi séparément, 2 fr. 50 c.

— ALGÈBRE et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes fort étendues; par A.-A.-L. REYNAUD. Examinateur des Candidats à l'Ecole Polytechnique, etc., in-8., 1822, 6 fr.
Les Notes se vendent aussi séparément, 4 fr.

Le texte pur se vend séparément, 4 fr.

LA CAILLE et MARIE. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES, cinquième édit., avec des Notes par M. Labey, Professeur de Mathématiques et Examinateur des Candidats pour l'Ecole Polytech., in-8., 6 fr. 50 c.

DEMONFERRAND, Professeur de Mathématiques et de Physique au Collège de Versailles. MANUEL D'ELECTRICITE DYNAMIQUE, ou Traité sur l'Action mutuelle des conducteurs électriques et des aimans, et sur la nouvelle Théorie du Magnétisme, pour faire suite à tous les Traités de Physique élémentaires, in-8., 1823, avec 5 planches, 4 fr.

HAUY, TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, adopté par le Conseil royal de l'Instruction publique pour l'enseignement dans les Collèges, troisième édition, considérablement augmentée, 2 vol. in-8., avec 19 pl., 1821, 15 fr.

* MONGE, TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des Ecoles de la Marine, cinquième édition, in-8., revue par M. Hachette, ex-Instituteur, de l'Ecole Polytechnique, Professeur de Mathématiques, etc., 3 fr. 25 c.

OUVRAGES DESTINÉS AUX CANDIDATS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DES ÉCOLES MILITAIRES.

Ouvrages de M. REYNAUD, Examinateur des Candidats de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole spéciale militaire.

1^o. ARITHMÉTIQUE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole militaire, 10^e édition, augmentée d'une table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix mille, 1 vol. in-8., 1811, 3 fr. 50 c.

2^o. TRAITÉ D'ALGÈBRE à l'usage des Elèves qui se destinent à l'Ecole royale Polytechnique et à l'Ecole spéciale militaire, 1 vol. in-8., 5^e édit., 1821, 5 fr. 50 c.

3^o. ALGÈBRE, anc. édit., 2^e section, 1 vol. in-8., 1810, 5 fr.

4^o. TRIGONOMETRIE RECTILIGNE ET SPHERIQUE, troisième édition, suivie des TABLES DES LOGARITHMES des nombres et des lignes trigonométriques de LALANDE, in-8., avec figures, 1818, 3 fr.

Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie, se vendent séparément, 2 fr.

5^o. TRAITÉ D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMETRIE à l'usage des élèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique, etc., 1 vol. in-8., avec 10 planches, 1819, 6 fr.

6^o. REYNAUD et DUHAMEL. Problèmes et Développemens sur diverses parties des Mathématiques, in-8., 1823, avec 11 planches, 6 fr.

7^o. ARITHMÉTIQUE à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8., 5 fr.

8^o. MANUEL de l'Ingénieur du Cadastre; par MM. Pommies et Reynaud, in-4., 12 fr.

9^o. TRAITÉ D'ARPENTAGE de Lagnève, avec les Notes de Reynaud, in-8., 7 fr.

Notes sur Bezout, par Reynaud.

10^o. ARITHMÉTIQUE DE BEZOUT, avec les Notes, 11^e édit., in-8., 1823, 3 fr.

11^o. GÉOMÉTRIE DE BEZOUT, avec les Notes, in-8., 2^e édit., 1812, 6 fr.

12^o. ALGÈBRE et application de l'Algèbre à la Géométrie de Bezout, avec les Notes, in-8., 1822, 6 fr.

Ouvrages de M. GARNIER, ex-Professeur à l'École Polytechnique, Docteur en la Faculté des Sciences de l'Université, Professeur de Mathématiques à l'École royale militaire.

- TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE**, deuxième édit., in-8., 1808, 2 fr. 50 c.
 — **ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE** à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, troisième édit., in-8., 1811, revue, corrigée et augmentée, 6 fr.
 — Suite de ces **Éléments**, 2^e partie. **ANALYSE ALGÈBRE**, nouv. édit., considérablement augmentée, in-8., 1814, 7 fr.
 — **GEOMETRIE ANALYTIQUE**, ou application de l'Algèbre à la Géométrie, seconde édition, revue et augm., 1 vol. in-8., avec 14 pl., 1813, 6 fr.
 — **LES RECIPROQUES** de la Géométrie, suivies d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables trigonométriques, in-8., 2^e édit., considérablement augmentée, 1810, 6 fr.
 — **ÉLÉMENTS DE GEOMETRIE**, contenant les deux Trigonométries, les éléments de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive, 1 vol. in-8., avec pl., 1812, 5 fr.
 — **LEÇONS DE STATIQUE** à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique, un vol. in-8., avec 12 pl., 1811, 5 fr.
 — **LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL**, 3^e édition, 1 vol. in-8., avec 4 pl., 1811, 7 fr.
 — **LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL**, 1 vol. in-8., avec 2 pl., 1812, 7 fr.
 — **TRISÉCTION DE L'ANGLE**, suivie de recherches analytiques sur le même sujet, in-8., 1809, 2 fr. 50 c.
 — **DISCUSSION DES RACINES** des Équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues, deuxième édition, 1 vol. in-8., 1 fr. 80 c.
FRANÇEUR, Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, ex-Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, etc. **COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES**, dédié à S. M. Alexandre 1^{er}, Empereur de Russie; Ouvrage destiné aux Elèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se préparent à y être admis, etc., seconde édition considérablement augmentée, 2 vol. in-8., avec figures, 1819, 15 fr.
 — **URANOGRAPHIE** ou **TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE**, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, accompagné de planisphères, etc., troisième édit., considérabl. augm., 1 v. in-8.; avec pl., 1821, 9 fr.
SUZANNE, Docteur en-Sciences, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne, à Paris. **DE LA MANIÈRE D'Étudier LES MATHÉMATIQUES**; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux surtout qui veulent approfondir cette science, ou qui aspirent à être admis à l'École Normale ou à l'École Polytechnique, 2 gros vol. in-8., avec figures, 12 fr. 50 c.
 Chaque partie se vend séparément, savoir:
 — Première partie, **PRÉCEPTES GÉNÉRAUX** et **ARITHMÉTIQUE**, seconde édit., considérablement augmentée, in-8., 6 fr.
 — Seconde partie, **ALGÈBRE**, épuisée.
 — Troisième partie, **GEOMETRIE**, in-8., 6 fr. 50 c.
BOUCHARLAT, Professeur de Mathématiques transcendantes aux Écoles militaires, Docteur en-Sciences, etc., **ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL** et de Calcul intégral, 2^e édit., revue et augmentée, in-8., avec pl., 1820, 6 fr.
 — **THÉORIE DES COURBES** et des Surfaces du second ordre, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analytique, 2^e éd., augm., in-8., 5 fr.
 — **ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE**, in-8. avec planches, 1815, 6 fr.
POISSON, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris et Membre adjoint du Bureau des Longitudes. **TRAITÉ DE MÉCANIQUE**, 2 v. in-8., de plus de 500 pag. chacun, avec 8 pl., 1811, 12 fr.
 Ce **Traité de Mécanique**, le plus complet qui existe, a été adopté par l'École Polytechnique pour l'instruction des Elèves. Il renferme, en outre, les notions de Statique élémentaire qu'on exige des Candidats qui se destinent pour l'École.
POINSOT, Membre de l'Institut, **TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE** de Statique, adopté pour l'instruction publique, in-8., 3^e édit., 1821, avec pl., 5 fr.
DELABRE, Membre de l'Institut, **ABRÉGÉ D'ASTRONOMIE**, ou **Leçons**

- élémentaires d'Astronomie théorique et pratique données au Collège de France ,
1 vol. in-8., 1813, 10 fr.
- LAPLACE (M. le marquis de), Membre de l'Institut, EXPOSITION DU
SYSTÈME DU MONDE, 5^e édition, 1824, in-4., avec portrait, 15 fr.
- Le même, 2 vol. in-8., 1824, 12 fr.
- ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS, in-8., 4^e éd.,
1816, 4 fr.
- MONGE, Membre de l'Institut, etc. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 4^e édition,
augmentée d'une théorie des Ombres et de la Perspective, extraite des papiers
de l'Auteur, par M. BRISSON, ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Ingénieur
en Chef des Ponts et Chaussées, 1 v. in-4., avec 28 planches, 1820, 12 fr.
- DE STAINVILLE, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. MÉLANGES D'ANA-
LYSE ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE, 1 vol. in-8., avec planches,
1815, 7 fr. 50 c.
- HACHETTE. PROGRAMME D'UN COURS DE PHYSIQUE, ou Précis
des Leçons sur le Calorique et sur quelques applications des Mathématiques à
la Physique, 1 vol. in-8., 1809, 5 fr. 50 c.
- LAGRANGE, Membre de l'Institut. LEÇONS SUR LE CALCUL DES
FONCTIONS, nouvelle édition in-8., 6 fr. 50 c.
- EULER. ELEMENS D'ALGÈBRE, nouvelle édition, revue par MM. Lagrange
et Garnier, 2 vol. in-8., 1807, 12 fr.
- DUBOURGUET. TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉREN-
TIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, 2 vol. in-8., 1810 et 1811, 16 fr.
- ELEMENS D'IDEOLOGIE, par DESTUT TRACY, 24 fr.
- Chaque volume se vend séparément. — Idéologie proprement dite, 5 fr. — Gram-
maire, 5 fr. — Logique, 6 fr. — Traité de la volonté, 6 fr. — Principes logiques, 2 fr.

Ouvrages sous presse pour paraître très incessamment.

HISTOIRE DE L'ASTRONOMIE AU XVIII^e SIÈCLE, par DELAMBRE
publiée par M. MATHIEU, membre de l'Institut et du bureau des Longitudes,
2 vol. in-4.

Le second volume renfermera l'HISTOIRE DE LA MESURE DE LA TERRE
avec des mélanges et variétés astronomiques jusqu'en 1822.

NOUVEAU TRAITE ELEMENTAIRE DE PERSPECTIVE à l'usage des
artistes et des personnes qui s'occupent du Dessin, précédé des premières notions
de la Géométrie élémentaire, de la Géométrie descriptive, de l'Optique et de
la projection des ombres, par J.-B. CLOQUET, ancien Dessinateur de l'Inspection
générale des Echelles du Levant, au service de la Marine royale de
France; ex-Professeur de Dessin à l'Ecole des Mines et à celle de la Brigade
topographique au Dépôt des Fortifications; 1 vol. in-4., et atlas de 84 planches,
dont plusieurs colorées, 1809, paraitra le 31 janvier, 30 fr.

Il a été tiré quelques exemplaires des planches (en premières épreuves) sur
grand papier, vélin double, dont le prix est de 36 fr.

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE
CHIMIE, à l'usage des élèves qui se destinent à subir les examens pour le Bache-
laureat ès-lettres, par M. le baron DE REYNAUD, Examinateur des Candidats
de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole spéciale militaire.

Ce Cours est entièrement conforme au programme qui a été publié par ordre
de l'Université, dans le Manuel pour le Bachelier ès-lettres.

RECUEIL DE PROPOSITIONS DE GEOMETRIE démontrées par l'analyse,
suivies de la Trigonométrie appliquée au levé des plans, etc., par PUISSANT,
Chef de Bataillon au Corps des Ingénieurs-Géographes; 1 vol. in-8. 3^e édit. consi-
dérablement augmentée.

TRAITE DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS NUMERIQUES de
tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des Equations
algébriques, par LAGRANGE, Membre de l'Institut, Grand-Officier de la Lé-
gion d'Honneur, etc.; 3^e édition, revue et augmentée, in-4.

TRAITE DE MÉCANIQUE CÉLESTE, tome V^e, par M. le marquis de
LAPLACE. Ce volume sera composé des livres XI à XV; le XI^e et le XII^e
paraissent; le XIII^e paraîtra dans le commencement de février.

PRÉFACE.

IL est, dans l'histoire des connaissances humaines, des époques où le génie, après s'être élevé au plus hautes conceptions, semble quelque temps arrêté dans son vol pour prendre bientôt un nouvel essor, et se signaler par l'une de ces découvertes qui changent la face de la science.

C'est ainsi que Descartes, par l'application de l'Algèbre à la Géométrie, se fraya une route inconnue à ses prédécesseurs, et que Newton et Leibnitz étonnèrent l'Europe savante par l'invention d'une analyse supérieure encore à la Géométrie de Descartes.

Jamais découverte n'honora plus l'esprit humain : l'infini, cet être idéal, parut soumis au calcul, et opérer des prodiges. En vain quelques philosophes voulurent révoquer en doute l'exactitude d'une analyse aussi singulière; ils ne purent en contester les résultats, et ne firent qu'exciter les géomètres à méditer davantage sur la vraie métaphysique des nouveaux calculs. Newton, le premier, pénétra ce mystère, en considérant le Calcul différentiel comme la méthode des premières et dernières raisons des quantités, ou autrement, comme la méthode des limites de leurs rapports. D'Alembert pré-

senta les idées de Newton comme renfermant la vraie métaphysique du Calcul différentiel, et prouva que, par la méthode des limites, on peut donner une explication satisfaisante de celle des fluxions des Anglais, dégagée de toute considération de mouvement, idée étrangère au Calcul différentiel. Postérieurement à d'Alembert, plusieurs géomètres, et entre autres Cousin, ont exposé dans leurs écrits la méthode des limites; mais ce n'est que depuis qu'elle a été démontrée à l'aide du théorème de Taylor, qu'on l'a mise dans tout son jour, et qu'on a dissipé entièrement les doutes qui pouvaient naître de la métaphysique spéculative de la méthode des infiniment petits, méthode qui peut être regardée comme une espèce d'abréviation de celle des limites.

La méthode des infiniment petits, sous ce rapport, n'est plus qu'un moyen expéditif de trouver les différentielles des diverses fonctions; elle grave ces différentielles dans notre mémoire, par des figures géométriques réduites au dernier degré de simplicité, et qui parlent plus à l'imagination que des idées abstraites; enfin, cette méthode devient indispensable dans les hautes parties de la Mécanique et de l'Astronomie, où, sans son secours, la résolution des problèmes deviendrait souvent d'une extrême complication; aussi nos grands géomètres, dans les parties les plus relevées de leurs écrits, en font-ils souvent usage.

Cette méthode, dans sa métaphysique même, eut

autrefois d'ardens défenseurs, parce que si l'on ne s'écarte pas d'une certaine série de propositions, tout paraît avoir la rigueur mathématique, et semble découler naturellement d'un principe fondamental.

Ce principe a été regardé jusqu'à présent comme une espèce d'axiome ; mais le point de vue sous lequel il nous fait considérer l'infini, nous présentant des conséquences difficiles à admettre, j'ai cru devoir le démontrer, en donnant pour base à la méthode des infiniment petits un autre principe qui, également fondé sur les notions que nous avons de l'infini, satisfait plus à la raison par l'idée de limite qu'il renferme tacitement.

Si la méthode des limites complète celle des infiniment petits, en rectifiant ce qu'il peut y avoir de défectueux dans cette dernière, la méthode de Lagrange complète à son tour celle des limites, en rattachant les coefficients différentiels à la pure Algèbre.

On peut donc considérer ces trois méthodes comme n'en formant pour ainsi dire qu'une seule ; aussi, en les comparant, reconnaît-on que les principes qui en découlent leur sont communs, et qu'il ne faut, pour les entendre toutes, qu'ajouter très peu de choses à celle des limites. La Méthode de Lagrange se réduit alors, en quelque sorte, à un théorème que j'ai rendu extrêmement facile par les modifications que j'ai fait subir à sa démonstration.

Je ne me suis pas moins attaché à présenter sous un jour favorable les diverses théories dont se compose

ce Traité. J'y ai développé, comme dans mes autres ouvrages en Mathématiques, toutes les opérations, persuadé que ce n'est pas en les supprimant qu'un auteur peut donner une idée plus avantageuse de la profondeur de ses connaissances; et qu'il ne doit être jugé que par la manière dont il expose ses idées, et par les aperçus plus ou moins nouveaux renfermés dans ses écrits.

A ces considérations j'ajouterai que dès qu'on s'assujétit ainsi à n'omettre aucune idée intermédiaire, ce n'est qu'à force de précision qu'on peut éviter les longueurs si nuisibles à l'ensemble d'une théorie; et la difficulté devient encore plus grande lorsqu'une partie de l'ouvrage est consacrée à rendre raison des choses.

Par la multitude d'objets traités dans celui-ci, on jugera encore mieux des obstacles que j'ai dû rencontrer après m'être donné de pareilles entraves.

Parmi les additions que j'ai faites à cette nouvelle édition, je citerai les Points singuliers, les Maxima et Minima des fonctions de deux variables, les Courbes polaires, la Théorie de la variable indépendante, les Solutions particulières des équations différentielles, la Cubature des corps terminés par des surfaces courbes et la Quadrature de ces surfaces, les Conditions d'intégrabilité des fonctions de trois variables, les Équations différentielles du second ordre, les Équations simultanées, etc.; enfin, j'ai terminé cet Ouvrage par une Théorie des équations dif-

férentielles partielles, avec quelques considérations générales sur les fonctions arbitraires qui complètent leurs intégrales; ce qui m'a conduit à donner l'explication du procédé dont on fait usage pour déterminer la fonction arbitraire qui entre dans une équation, lorsque les équations de condition sont données.

La manière dont, en considérant les surfaces courbes, j'ai traité cette question importante, est analogue à celle que j'ai employée à l'égard des constantes arbitraires. C'est ainsi qu'à l'aide des courbes, j'ai montré comment une équation étant différenciée et ensuite intégrée, on peut retrouver la même constante que la différenciation avait fait disparaître, question qui, à ma connaissance, n'avait pas encore été discutée.

Le Calcul différentiel et le Calcul intégral, plus qu'aucune autre partie des Mathématiques, étant composés d'une multitude de théories qui sont souvent indépendantes les unes des autres, j'ai cru devoir indiquer, par des caractères plus petits, les choses qui peuvent être supprimées à une première lecture. Par là, ceux qui ne veulent faire qu'une étude peu approfondie de la haute Géométrie, auront la faculté de ne voir que les parties les plus élémentaires de cet Ouvrage, tandis que ceux qui désirent acquérir des connaissances plus étendues, après s'être familiarisés davantage avec les principes, parcourront avec plus de fruit les autres parties.

TABLE DES MATIÈRES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

De la différenciation des quantités algébriques.	pag. 1
Des différentielles successives.	16
Théorème de Maclaurin.	17
De la différenciation des quantités transcendantes.	20
Des différentielles logarithmiques.	23
Des différentielles des sinus, cosinus et autres lignes trigonométriques, ou des différentielles des fonctions circulaires.	24
Théorème de Taylor.	29
Application de la formule de Taylor au développement en série de diverses fonctions.	32
De la différenciation des équations à deux variables.	35
De la méthode des tangentes.	41
Application des formules précédentes à des exemples.	44
Des asymptotes des courbes.	45
De l'équation du plan tangent à une surface courbe, et de celle de la normale à cette surface.	46
Des fonctions qui, pour une valeur de la variable, deviennent	50
Des maxima et minima dans les fonctions d'une seule variable.	56
Application de la théorie des maxima et minima à la solution des divers problèmes.	62
De la signification géométrique des coefficients différentiels.	73
Considérations générales sur les points singuliers des courbes.	79
Des points d'inflexion.	80
Des points de rebroussement.	87
Des points multiples.	91
Des points conjugués.	94
Des courbes osculatrices.	96
Application du théorème de Taylor au développement des fonctions des deux variables qui reçoivent des accroissemens.	118
Des maxima et minima, dans les fonctions de deux variables.	120
De la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires.	122
De la transformation des coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires, et détermination de l'expression différentielle de l'arc dans une courbe polaire.	123
Des sous-tangentes, sous-normales, normales et tangentes aux courbes polaires.	126
De la détermination de l'expression du rayon de courbure dans une courbe polaire.	129
Des courbes transcendantes.	131
De la spirale d'Archimède ou de Conon.	ibid.
De la spirale logarithmique.	132

TABLE DES MATIÈRES.

xj

De la spirale hyperbolique et des spirales comprises dans l'équation $u = ar^a$	pag. 135
De la logarithmique	137
De la cycloïde	138
<i>Du changement de la variable indépendante</i>	146
De la méthode des infiniment petits	152
De la méthode de Lagrange pour démontrer les principes du Calcul différentiel, sans la considération des limites, des infiniment petits, ou de toute quantité évanouissante	159
<i>Des cas où la formule de Taylor est en défaut</i>	167

CALCUL INTEGRAL.

De l'intégration des différentielles monomes	173
Des différentielles complexes dont l'intégration peut s'effectuer par la règle de l'article 262	177
Des différentielles qui s'intègrent par arcs de cercle	179
De l'intégration par parties	185
De l'intégration par les séries	187
De la méthode des fractions rationnelles	197
De l'intégration des fonctions irrationnelles	223
De l'intégration des différentielles binomes	230
<i>Des formules de réduction des différentielles binomes</i>	236
De l'intégration des quantités qui renferment de sinus et des cosinus	241
De l'intégration des quantités exponentielles et logarithmiques	246
De la série de Jean Bernouilli	250
De la quadrature des courbes	251
De la rectification des courbes	258
De la détermination de l'aire des solides de révolution	269
De la cubature des solides de révolution	265
<i>De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, au moyen des intégrales doubles</i>	269
<i>De la quadrature des surfaces courbes</i>	271
De l'intégration des fonctions de deux variables	274
De la séparation des variables, de l'équation linéaire du premier ordre, et des propriétés des fonctions homogènes	<i>ibid</i>
Des conditions d'intégrabilité des fonctions de deux variables. — Intégration des fonctions qui remplissent ces conditions. — Recherche des facteurs propres à rendre intégrables les équations qui ne le sont pas immédiatement	285
<i>Des conditions d'intégrabilité des fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables. Intégration des équations de trois variables qui y satisfont. De l'équation de condition qui a lieu pour que l'intégration des équations différentielles à trois variables dépende d'un facteur commun, et des moyens de satisfaire à la proposée, lorsque cette équation de condition n'existe pas</i>	298
Théorie des constantes arbitraires	304
Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre	308

<i>Des équations linéaires.</i>	pag. 315
<i>De l'intégration des équations simultanées.</i>	320
<i>De l'intégration des équations différentielles du second ordre.</i>	321
<i>Des équations différentielles partielles du premier ordre.</i>	328
<i>Des équations différentielles partielles du second ordre.</i>	342
<i>De la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles du premier ordre.</i>	345
<i>Des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles du second ordre.</i>	354

NOTES.

<i>NOTE 1. Sur la manière de trouver le développement du logarithme de $x+h$.</i>	357
<i>NOTE 2. Sur le principe fondamental de la méthode des coefficients indéterminés.</i>	359
<i>NOTE 3. Sur le développement des puissances des cosinus et des sinus en fonction des arcs multiples.</i>	360
<i>NOTE 4. Sur la manière de déterminer les volumes des corps dont la surface peut être exprimée par une fonction d'une même variable.</i>	366
<i>NOTE 5. Sur la projection d'une surface plane.</i>	368
<i>NOTE 6. Sur l'expression du cosinus de l'angle formé par deux plans, déterminée directement par un procédé nouveau.</i>	369
<i>NOTE 7. Sur une courbe à double courbure, qui peut être construite au moyen de deux équations entre trois variables.</i>	371
<i>NOTE 8. Nouvelle démonstration concernant l'intégration des équations différentielles partielles.</i>	372
<i>NOTE dernière. Sur l'intégration des fonctions rationnelles qui, dans leurs dénominateurs égales à zéro, contiennent des racines imaginaires et égales.</i>	375

ÉLÉMENTS

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL •

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

De la différenciation des quantités algébriques.

1. ON dit qu'une variable est fonction d'une autre variable, lorsque la première est égale à une certaine expression analytique composée de la seconde; par exemple, y est une fonction de x dans les équations suivantes :

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = x^3 - 3bx^2, \quad y = \frac{x^2}{a}, \quad y = b + cx^2.$$

2. Considérons une fonction dans son état d'accroissement; en vertu de celui de la variable qu'elle renferme : toute fonction d'une variable x pouvant être représentée par l'ordonnée d'une courbe BMM', fig. 1, soient AP = x et PM = y , les coordonnées d'un point M de cette courbe, et supposons Fig. 1: que l'abscisse AP reçoive un accroissement PP' = h ; l'ordonnée PM deviendra P'M' = y' . Pour obtenir la valeur de cette nouvelle ordonnée on voit donc qu'il faut changer x en $x + h$ dans l'équation de la courbe, et la valeur que cette équation déterminera alors pour y sera celle de y' .

Par exemple, si l'on avait l'équation $y = mx^2$, on obtiendrait y' en changeant x en $x + h$ et y en y' , et l'on aurait

$$y' = m(x^2 + 2mxh + mh^2).$$

3. Prenons maintenant l'équation

$$y = x^3 \dots (1),$$

et supposons que y devienne y' lorsque x devient $x + h$; nous aurons donc

$$y' = (x + h)^3 ;$$

et en développant,

$$y' = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 ;$$

si de cette équation nous retranchons l'équation (1) il restera

$$y' - y = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 ;$$

et en divisant par h ,

$$\frac{y' - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \dots (2).$$

Voyons ce que ce résultat nous apprend : $y' - y$ représente l'accroissement de la fonction y en vertu de l'accroissement h donné à x , puisque cette différence $y' - y$ est celle du nouvel état de grandeur de y à son état primitif.

D'une autre part, l'accroissement de x étant h , il suit de là que l'expression $\frac{y' - y}{h}$ est le rapport de l'accroissement de la fonction y à celui de la variable x . En considérant le second membre de l'équation (2), on voit que ce rapport diminue d'autant plus que h diminue, et que lorsque h devient nul, ce rapport se réduit à $3x^2$.

Ce terme $3x^2$ est donc la limite du rapport $\frac{y' - y}{h}$: c'est vers ce terme qu'il tend lorsqu'on fait diminuer h .

4. Dans l'hypothèse de $h = 0$ l'accroissement de y devenant aussi nul, $\frac{y' - y}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$, et par conséquent l'é-

DIFFÉRENCIATION DES QUANTITÉS ALGÈBRIQUES. 3
 équation (2) devient

$$\frac{0}{0} = 3x^2 \dots (3).$$

Cette équation n'a rien d'absurde, parce que l'Algèbre nous apprend que $\frac{0}{0}$ peut représenter toutes sortes de quantités. D'ailleurs on conçoit que puisqu'en divisant les deux termes d'une fraction par un même nombre, cette fraction ne change pas de valeur, il en résulte que la petitesse des termes d'une fraction n'influe en rien sur sa valeur, et que par conséquent elle peut rester la même lorsque ses termes sont parvenus au dernier degré de petitesse, c'est-à-dire sont devenus nuls.

La fraction $\frac{0}{0}$ qui se trouve dans l'équation (3) est un symbole qui a remplacé le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable : comme ce symbole ne laisse aucune trace de cette variable, représentons-le par $\frac{dy}{dx}$; alors $\frac{dy}{dx}$ nous rappellera que la fonction était y et que la variable était x . Mais dy et dx n'en seront pas moins des quantités nulles, et nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \dots (4) :$$

$\frac{dy}{dx}$ ou plutôt sa valeur $3x^2$ est le coefficient différentiel de la fonction y .

5. Remarquons que $\frac{dy}{dx}$ étant le signe qui représente la limite $3x^2$ [comme le montre l'équation (4)], dx doit toujours être placé sous dy . Cependant, pour faciliter les opérations de l'Algèbre, on peut momentanément faire évanouir le dénominateur de l'équation (4), et l'on a $dy = 3x^2 dx$. Cette expression $3x^2 dx$ est ce qu'on appelle la différentielle de la fonction y .

6. Cherchons encore la différentielle de la fonction $a + 3x^3$. Pour cet effet, il faut donc dans l'équation $y = a + 3x^3$ faire $x = x + h$, et, en changeant y en y' , cette équation deviendra

$$y' = a + 3x^3 + 6xh + 3h^3;$$

donc $\frac{y' - y}{h} = 6x + 3h$; égalant h à zéro, il nous vient

$$\frac{dy}{dx} = 6x : \text{donc la différentielle cherchée est } dy = 6x dx.$$

7. Pour troisième exemple, cherchons la différentielle de $y = ax^3 - b^3$: faisons $x = x + h$, et substituant nous avons

$$y' = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 - b^3;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2;$$

passant à la limite on a

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2.$$

Tel est le coefficient différentiel de la fonction proposée; la différentielle sera $dy = 3ax^2 dx$.

8. Proposons-nous de trouver encore la différentielle de $y = \frac{1-x^3}{1-x}$: effectuant la division, on trouve $y = 1 + x + x^2$; mettant $x + h$ à la place de x , et y' à celle de y , on obtient

$$y' = 1 + x + h + x^2 + 2hx + h^2,$$

et en ordonnant par rapport à h ,

$$y' = 1 + x + x^2 + (2x + 1)h + h^2;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = 2x + 1 + h;$$

passant à la limite, on a $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$; donc la différentielle de $\frac{1-x^3}{1-x}$ est $(2x+1) dx$.

9. Prenons encore pour exemple

$$y = (x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2);$$

développant on a

$$y = x^4 - 5a^2x^2 + 6a^4;$$

substituant $x+h$ à x et y' à y , et ordonnant ensuite par rapport à h , il vient

$$y' = x^4 - 5a^2x^2 + 6a^4 + (4x^3 - 10a^2x)h + (6x^2 - 5a^2)h^2 + 4xh^3 + h^4;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = 4x^3 - 10a^2x + (6x^2 - 5a^2)h + 4xh^2 + h^3;$$

passant à la limite, on a

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 10a^2x;$$

et en multipliant par dx , on trouve que la différentielle est

$$dy = (4x^3 - 10a^2x) dx.$$

10. L'expression dx est elle-même la différentielle de x ; car soit $y = x$, on a $y' = x + h$; donc $y' - y = h$, et par conséquent $\frac{y' - y}{h} = 1$. Comme la quantité h n'entre pas dans le second membre de cette équation, on voit que pour passer à la limite, il suffit de changer $\frac{y' - y}{h}$ en $\frac{dy}{dx}$; ce qui donne $\frac{dy}{dx} = 1$; donc $dy = dx$.

On trouverait de même que la différentielle de ax est adx .

11. Il est à observer que quelquefois l'accroissement de

la variable est négatif; dans ce cas il faut substituer $x - h$ à x , et opérer comme précédemment.

Ainsi pour trouver la différentielle de ax^3 lorsque l'accroissement est négatif, on remplacera x par $x - h$, et l'on aura

$$y' = ax^3 - 3ax^2h + 3axh^2 - ah^3;$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = -3ax^2 + 3axh - ah^2;$$

passant à la limite, on aura $\frac{dy}{dx} = -3ax^2$, et par conséquent $dy = -3ax^2 dx$.

On voit que cela revient à supposer dx négatif dans la différentielle de y calculée dans l'hypothèse d'un accroissement positif.

12. Avant que d'aller plus loin, faisons une remarque essentielle, c'est que dans une équation dont le second membre est une fonction de x , et que pour cette raison nous représenterons généralement par $y = fx$, si l'on change x en $x + h$, et qu'après avoir ordonné par rapport aux puissances de h on trouve le développement suivant

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.},$$

on doit toujours avoir $y = A$. En effet, si l'on fait $h = 0$, le second membre se réduit à A ; à l'égard du premier membre, comme nous n'avons accentué y que pour marquer que y éprouvait un certain changement lorsque x devenait $x + h$, il faudra lorsque h sera nul, que nous supprimions l'accent de y , et l'équation (2) se réduira alors à

$$y = A.$$

13. Ceci va nous donner les moyens de généraliser le procédé de la différenciation. En effet, si dans l'équation $y = fx$, dans laquelle on est censé connaître l'expression représentée par fx , on a mis $x + h$ à la place de x , et

qu'après avoir ordonné par rapport aux puissances de h on ait obtenu le développement suivant

$$y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.},$$

ou plutôt, d'après l'article précédent,

$$y' = y + Bh + Ch^2 + \text{etc.},$$

on aura

$$y' - y = Bh + Ch^2 + \text{etc.};$$

donc

$$\frac{y' - y}{h} = B + Ch + \text{etc.};$$

et en passant à la limite, $\frac{dy}{dx} = B$. Ce qui nous apprend que le coefficient différentiel est égal au coefficient du terme qui contient la première puissance de h dans le développement de $f(x+h)$ ordonné par rapport aux puissances ascendantes de h .

14. Si au lieu d'une fonction y qui s'accroît en vertu d'un accroissement donné à la variable x , nous avons deux fonctions différentes que nous représenterons par y et par z , en substituant dans ces fonctions $x+h$ à x , elles deviendront y' et z' ; supposons qu'ayant ensuite ordonné par rapport à h , on ait

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \text{etc.} \dots (5),$$

$$z' = z + A'h + B'h^2 + \text{etc.} \dots (6);$$

passant à la limite, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = A, \frac{dz}{dx} = A'; \dots (7);$$

multipliant ensuite les équations (5) et (6) l'une par l'autre, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} z'y' &= zy + Azh + Bzh^2 + \text{etc.} \\ &\quad + A'yh + AA'h^2 + \text{etc.} \\ &\quad + B'yh^2 + \text{etc.}; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)h + \text{etc.};$$

passant à la limite, et indiquant par un point l'expression qui doit être différenciée, on obtiendra

$$\frac{d.zy}{dx} = Az + A'y;$$

mettant au lieu de A et de A' leurs valeurs données par les équation (7), il nous viendra

$$\frac{d.zy}{dx} = \frac{zdy}{dx} + \frac{ydz}{dx},$$

et en supprimant le diviseur commun dx ,

$$d.zy = zdy + ydz.$$

Ainsi pour trouver la différentielle d'un produit de deux variables, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter les produits.

15. Au moyen de cette règle on trouvera facilement la différentielle d'un produit de trois variables.

Soit, par exemple, yzu : faisons $yz = t$, nous aurons donc $d.yzu = d.tu$.

Or, d'après ce qui précède,

$$d.tu = tdu + udt \dots (8);$$

et puisque $t = yz$, on a $dt = ydz + zdy$; mettant donc ces valeurs de t et de dt dans l'équation (8), elle se changera en $d.yzu = yzdu + ydz + uzdy$.

On voit que la même règle subsiste encore pour un produit de trois variables, c'est-à-dire qu'il faut écrire le produit yzu , et remplacer successivement chaque variable par sa différentielle, et ajouter ces produits.

16. La même règle a lieu pour un plus grand nombre de variables.

17. Nous avons vu art. 10, que la différentielle de ax était adx ; concluons que lorsqu'il y a une constante dans un produit, il suffit de différencier comme si la constante n'y était pas, et de multiplier ensuite par la constante.

Par exemple, on trouverait que la différentielle de axy est $axy + aydx$.

18. Une constante n'a pas de différentielle; car soit $y = ax + b$, en opérant comme dans l'art. 7, on trouve $dy = adx$, résultat qui est le même que si l'on n'avait point eu la constante b .

19. La différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx - xdy}{y^2}$; car supposons $\frac{x}{y} = z$, nous avons $x = yz$; donc, art. 14, $dx = ydz + zdy$; d'où nous tirons $yzdz = dx - zdy$: mettant dans le second membre la valeur de z , il vient $yzdz = dx - \frac{x}{y} dy$; réduisant au même dénominateur,

$$yzdz = \frac{ydx - xdy}{y},$$

et enfin

$$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \text{ ou d. } \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

20. Si dans l'équation $d.yzu = yzdu + yudz + zudy$, art. 15, on divise tous les termes par yzu , on obtiendra

$$\frac{d.yzu}{yzu} = \frac{du}{u} + \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}.$$

En général, en divisant la différentielle d'un produit d'un nombre quelconque de variables par ce produit, on trouvera

$$\frac{d.xyztu, \text{ etc.}}{xyztu, \text{ etc.}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u}, \text{ etc.} \dots (9).$$

Si x, y, z, t, u , etc., sont égaux à x et en nombre m , on aura dans le second membre de cette équation un nombre m de termes égaux à $\frac{dx}{x}$; ce second membre se changera donc en $\frac{mdx}{x}$ et l'équation (9) deviendra

$$\frac{d.x^m}{x^m} = m \frac{dx}{x},$$

et en multipliant par x^m , on aura

$$d.x^m = mx^{m-1}dx.$$

21. D'où l'on peut conclure cette règle : *lorsqu'une variable est élevée à une puissance m , pour avoir la différentielle, il faut, 1°. changer l'exposant en coefficient; 2°. affecter la variable d'un exposant moindre d'une unité; 3°. multiplier ensuite ce produit par dx .*

22. Si l'exposant était fractionnaire ou négatif, la même règle aurait lieu. Pour démontrer ce premier cas, soit

$y = x^{\frac{p}{q}}$; en élevant les deux membres à la puissance q , on aura $y^q = x^p$; donc, art. 21, $qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx$; d'où l'on tire

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} dx;$$

et comme x^{p-1} peut se mettre sous la forme $\frac{x^p}{x}$, et que de même $y^{q-1} = \frac{y^q}{y}$, en mettant ces valeurs, on a

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^p}{y^q} \frac{y}{x} dx;$$

et à cause de $x^p = y^q$, l'équation précédente se réduit à

$$dy = \frac{p}{q} \frac{y}{x} dx;$$

mettant enfin pour y sa valeur, on obtient

$$dy = \frac{p}{q} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{x} dx;$$

et en faisant passer le diviseur x en exposant, on a

$$dy = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} dx,$$

ce qui est la même chose que la différentielle de $y = x^{\frac{p}{q}}$ qu'on aurait obtenue en faisant usage de la règle n° 21.

Pour démontrer le cas où l'exposant est négatif, soit $y = x^{-p}$, ce qui revient à $y = \frac{1}{x^p}$; différenciant par la règle des fractions, art. 21, nous aurons

$$dy = \frac{x^p d.1 - 1.d.x^p}{x^p \times x^p}.$$

Observant que l'unité étant une constante, sa différentielle est nulle, cette expression se réduit à $dy = -\frac{d.x^p}{x^{2p}}$; effectuant la différenciation indiquée, art. 21, on aura $dy = -\frac{px^{p-1}dx}{x^{2p}}$, et en retranchant l'exposant $2p$ de l'exposant $p-1$, il vient enfin $dy = -px^{-p-1}dx$, comme on l'aurait trouvé en faisant usage de la règle du n° 21.

23. Si l'on remplace les radicaux par des exposans fractionnaires, la règle du n° 21 pourra donc servir à différencier ces sortes de quantités. Par exemple, pour trouver la différentielle de $\sqrt{z}$, on écrira $z^{\frac{1}{2}}$ dont la différentielle sera $\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$, ce qui nous apprend que pour avoir

la différentielle de la racine carrée d'une quantité variable, il faut diviser la différentielle de cette quantité par le double du radical.

24. Quelquefois la fonction y est la variable x ne sont pas données par une même équation. Par exemple, si l'on avait les équations $y = fu$ et $u = \phi x$, le premier moyen qui se présenterait pour obtenir le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ serait d'éliminer u entre ces deux équations, pour pouvoir y appliquer le procédé de la différenciation; mais sans avoir recours à cette opération préliminaire, on peut obtenir immédiatement le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$: c'est ce qui va être l'objet de la démonstration suivante.

Supposons donc que dans l'équation $u = \phi x$, on mette $x + h$ à la place de x et qu'alors u devienne $u' = u + k$, et qu'en substituant ensuite $u + k$ à la place de u dans l'équation $y = fu$, la fonction y devienne y' ; si, en développant ces fonctions de u et de x par rapport aux puissances de leurs accroissemens, la substitution de $x + h$ à la place de x dans la fonction u , nous donne

$$u' = u + qh + q'h^2 + q''h^3 + \text{etc.};$$

Et que la substitution de $u + k$ à la place de u dans la fonction y , nous donne

$$y' = y + pk + p'k^2 + p''k^3 + \text{etc.};$$

on obtiendra

$$\left. \begin{aligned} \frac{u' - u}{h} &= q + q'h + q''h^2 + \text{etc.} \\ \frac{y' - y}{k} &= p + p'k + p''k^2 + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Multipliant ces équations terme à terme, on aura

$$\frac{y' - y}{k} \cdot \frac{u' - u}{h} = (p + p'k + p''k^2 + \text{etc.}) (q + q'h + q''h^2 + \text{etc.})$$

Le premier membre de cette équation peut se réduire ; car l'accroissement de u étant représenté par h , est donc égal à $u' - u$; par conséquent au lieu de $\frac{y' - y}{h} \cdot \frac{u' - u}{h}$ nous pouvons écrire $\frac{y' - y}{h}$, et en mettant $x' - x$ à la place de h ; l'équation précédente devient

$$\frac{y' - y}{x' - x} = (q + q'h + q''h^2 + \text{etc.}) (p + p'h + p''h^2 + \text{etc.}) \dots (11)$$

Lorsque h est nul, k s'évanouit aussi (puisque u n'a pris l'accroissement k que parce que x est devenu $x + h$) ; par conséquent dans le cas où $h = 0$, qui est celui de la limite, l'équation (11) se change en

$$\frac{dy}{dx} = pq \dots (12).$$

Pour déterminer p et q , il faut supposer h et k nuls dans les équations (10), et ces équations donnent

$$\frac{dy}{du} = p, \quad \frac{du}{dx} = q.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation (12) ; on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \dots (13).$$

Ce résultat nous apprend que si l'on a deux équations $y = fu$ et $u = \phi x$, et qu'on en tire les valeurs des coefficients différentiels $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$, il suffira de multiplier ces valeurs entre elles pour avoir celle de $\frac{dy}{dx}$.

25. Si l'on a, par exemple, les équations $y = 3u^2$ et $u = x^3 + ax^2$; on trouvera

$$\frac{dy}{du} = 6u, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax;$$

donc en multipliant ces équations terme à terme on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = 6u(3x^2 + 2ax) = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax).$$

26. La formule (13) est d'un grand usage pour différencier des quantités compliquées; donnons-en quelques applications.

1°. Cherchons la différentielle de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; cela se réduit à trouver le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Pour cet

effet, faisons $a^2 - x^2 = u$, alors $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$; et les équations $y = \sqrt{u}$ et $u = a^2 - x^2$, art. 24, sont donc représentées ici par $y = u^{\frac{1}{2}}$ et par $u = a^2 - x^2$.

En différenciant ces équations, art. 21, on trouve

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x;$$

multipliant ces coefficients différentiels entre eux, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = -x (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

donc

$$dy = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Soit encore $y = (a + bx^m)^n$; pour trouver la différentielle, faisons $a + bx^m = u$, nous aurons les équations $y = u^n$, $u = a + bx^m$; donc

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1} = n(a + bx^m)^{n-1}, \quad \frac{du}{dx} = bmx^{m-1};$$

multipliant entre eux ces coefficients différentiels, on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = bmnx^{m-1} (a + bx^m)^{n-1}.$$

27. Pour troisième exemple soit

$$y = \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^4,$$

supposons

$$b - \frac{c}{x^2} = u \dots (14);$$

donc

$$y = (a + \sqrt{u})^4 \dots (15).$$

Différenciant l'équation (14) nous avons

$$du = \frac{2cx dx}{x^4};$$

donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{2c}{x^3};$$

l'équation (15) donne

$$dy = 4(a + \sqrt{u})^3 d(a + \sqrt{u}) = 4(a + \sqrt{u})^3 \frac{du}{2\sqrt{u}};$$

et en mettant pour u sa valeur, il vient

$$\frac{dy}{du} = \frac{2 \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}};$$

multipliant ces coefficients différentiels entre eux on a enfin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{4c}{x^3} \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}}.$$

On pourrait prendre encore pour exemple

$$y = (a + \sqrt{x})^3, \text{ et l'on trouverait } \frac{dy}{dx} = \frac{3(a + \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}.$$

28. On a souvent à différencier la somme de plusieurs fonctions d'une variable ; quoique, d'après ce qui précède, il soit évident que cette différentielle est égale à la somme des différentielles de ces fonctions, nous ne laisserons pas que de démontrer ce théorème.

Soit donc

$$y = fx + Fx + \phi x;$$

mettant $x + h$ à la place de x dans ces fonctions, supposons que l'on ait

$$y' = fx + Ah + A'h^2 + \text{etc.} + Fx + Bh + B'h^2 + \text{etc.} \\ + \phi x + Ch + C'h^2 + \text{etc.};$$

on trouvera

$$y' - y = (A + B + C)h + (A' + B' + C')h^2 + \text{etc.};$$

passant à la limite,

$$\frac{dy}{dx} = A + B + C \text{ et } dy = Adx + Bdx + Cdx.$$

Or A, B, C étant les termes multipliés par la première puissance de h dans les développemens de $f(x + h)$, de $F(x + h)$ et de $\phi(x + h)$, il en résulte que $Adx + Bdx + Cdx$ représentent la somme des différentielles des fonctions proposées.

29. Nous terminerons ce qui précède par une observation, c'est que des expressions qui ne diffèrent que par des termes constans, ont la même différentielle.

Ainsi $mx + nx^2 + a^2$ et $mx + nx^2 + ac - bd$ ont la même différentielle; cela est évident, puisqu'un terme constant n'a pas de différentielle.

Des différentielles successives.

30. Soit y une fonction de x ; si elle est différenciée, on trouvera un résultat de la forme pdx (p étant une quantité qui peut renfermer x). Si p renferme x , nous pourrions

Aussi différencier p , et obtenir un résultat représenté par qdx ; opérant de même par rapport à q , le résultat devra être encore de la forme de rdx , ainsi de suite. pdx , qdx , rdx , etc., sont les différentielles successives de y . Par exemple, si $y = ax^3$, on trouvera $dy = 3ax^2dx$; donc $p = 3ax^2$. Différenciant de nouveau, on a $dp = 6axdx$; donc $q = 6ax$. Différenciant encore, $dq = 6adx$; donc $r = 6a$. Ici la différenciation ne peut plus avoir lieu, puisque $6a$ est une constante.

Les équations

$$dy = pdx \text{ donnent, en divisant par } dx, \frac{dy}{dx} = p,$$

$$dp = qdx. \dots \dots \dots \frac{dp}{dx} = q,$$

$$dq = rdx. \dots \dots \dots \frac{dq}{dx} = r.$$

etc.

etc.

q étant obtenu par deux différenciations successives, et en divisant chaque fois par dx , nous représenterons cette opération par $\frac{d^2y}{dx^2}$, et nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2} = q$; de même en différenciant de nouveau et en divisant par dx , nous aurons $\frac{d^3y}{dx^3} = r$; ainsi de suite.

dy est la différentielle première de y ;

d^2y en est la différentielle seconde;

d^3y en est la différentielle troisième;

ainsi de suite.

Théorème de Maclaurin:

31. Soit y une fonction de x ; ordonnons-la par rapport à x , et supposons

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} \dots (16);$$

nous trouverons en différenciant et en divisant par dx ;

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \dots 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \dots 2.3D + 2.3.4Ex + \text{etc.},$$

etc.

Représentons par (y) ce que devient y quand $x = 0$,
 par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ce que devient $\frac{dy}{dx}$ quand $x = 0$,

..... par $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$ quand $x = 0$,

ainsi de suite; les équations précédentes nous donneront

$$(y) = A, \left(\frac{dy}{dx}\right) = B, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2.3D;$$

d'où nous tirerons

$$A = (y), B = \left(\frac{dy}{dx}\right), C = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), D = \frac{1}{2.3} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (16), elle deviendra

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x^2 + \frac{1}{2.3} \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3 \dots (17):$$

telle est la formule de Maclaurin.

32. Pour première application, prenons $y = \frac{1}{a+x}$,
 nous trouverons en différenciant,

$$dy = \frac{(a+x) d.1 - 1.d(a+x)}{(a+x)^2} = - \frac{dx}{(a+x)^2},$$

d'où nous concluons $\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{(a+x)^2}$;

différenciant de nouveau, nous trouverons successivement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(a+x)}{(a+x)^4} = \frac{2}{(a+x)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = - \frac{2.3(a+x)}{(a+x)^6} = - \frac{2.3}{(a+x)^4};$$

Faisant donc $x=0$ dans les valeurs de y , de $\frac{dy}{dx}$, de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous trouverons

$(y) = \frac{1}{a}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{a^2}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2}{a^3}$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\frac{2 \cdot 3}{a^4}$;
substituant ces valeurs et celle de y dans la formule (17), nous obtiendrons

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}$$

33. Pour seconde application, prenons $y = \sqrt{a^2 + bx}$; nous avons donc

$$y = (a^2 + bx)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (a^2 + bx)^{-\frac{1}{2}} b = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + bx}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (a^2 + bx)^{-\frac{3}{2}} b^2 = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b^2}{\sqrt{(a^2 + bx)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (a^2 + bx)^{-\frac{5}{2}} b^3 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} b^3}{\sqrt{(a^2 + bx)^5}} ;$$

si nous faisons $x=0$, ces valeurs deviendront

$$(y) = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a, \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b^2}{a^3}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} b^3}{a^5} ;$$

substituant dans la formule (17) ces valeurs de (y) , de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, etc., on trouvera

$$\sqrt{a^2 + bx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{b^2 x^2}{8a^3} + \frac{b^3 x^3}{16a^5} - \text{etc.}^3$$

34. Pour troisième exemple, prenons $y = (a+x)^m$; nous trouverons en différenciant,

$$\frac{dy}{dx} = m(a+x)^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(a+x)^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3} ;$$

faisant $x=0$, la valeur de y se réduit à a^m ; donc $(y) = a^m$, et celles des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., nous donnent

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = ma^{m-1}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m(m-1)a^{m-2}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = m(m-1)(m-2)a^{m-3}.$$

Substituant ces valeurs de (y) , de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, de $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ etc., dans l'équation (17), on trouve

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + m\frac{(m-1)}{2}a^{m-2}x^2 + m\frac{(m-1)}{2}\frac{(m-2)}{3}a^{m-3}x^3 + \text{etc.}$$

De la différenciation des quantités transcendentes.

35. On appelle quantités transcendentes celles qui sont affectées d'exposans variables, de logarithmes, de sinus, de cosinus, etc.

36. Proposons-nous de différencier d'abord a^x . Soit donc $y = a^x$, changeons x en $x+h$ et y en y' ; cette équation deviendra $y' = a^{x+h}$ ou plutôt $y' = a^x a^h$.

Il faut donc développer cette expression par rapport aux puissances de h ; or, pour que a^h puisse se développer par la formule du binôme, je ferai $a=1+b$, et par conséquent a^h deviendra.

$$(1+b)^h = 1 + h\frac{b}{1} + h(h-1)\frac{b^2}{1.2} + h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (18).$$

On ordonnera par rapport à h ; mais sans effectuer cette opération, comme nous n'avons besoin que des termes mul-

multipliés par la première puissance de h , nous remarquerons que si dans un produit tel que $h(h-1)(h-2)(h-3)$, etc., la partie $(h-1)(h-2)(h-3)$ etc., est composée de n facteurs, son développement, d'après la théorie des équations, sera de la forme $h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} \dots + Mh + N$, et que le terme N se composera du produit des secondes parties $-1, -2, -3$, etc. des binômes $h-1, h-2, h-3$, etc.; or puisque $h(h-1)(h-2)(h-3)$, etc. $= h(h^n + Ah^{n-1} \dots + Mh + N)$, il est bien évident que le terme qui contient la première puissance de h dans ce produit sera Nh ou, d'après ce qui précède, sera $(-1 \times -2 \times -3, \text{ etc.}) h$, d'où l'on peut conclure que pour trouver dans le développement 18, les termes affectés de la première puissance de h , dans les termes compliqués de ce développement, c'est-à-dire à partir du troisième, on formera ainsi les différens coefficients de h : le coefficient de h se composera du produit des nombres soustraits de h par $\frac{b^2}{1.2}$ dans le troisième terme, ou par $\frac{b^3}{2.3}$ dans le quatrième, et ainsi de suite.¹

Il suit de là que

$$a^h = 1 + (b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.})h + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.}$$

Représentons $(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3}, \text{ etc.})$ par A , nous aurons

$$a^h = 1 + Ah + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.};$$

substituant cette valeur dans l'équation $y' = a^x a^h$, cette équation deviendra

$$y' = a^x + Aa^x h + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.}$$

Si nous retranchons l'équation primitive $y = a^x$, il restera $y' - y = Aa^x h + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.}$, passant

à la limite, $\frac{dy}{dx} = Aa^x$; et en mettant la valeur de y ,

$$\frac{d.a^x}{dx} = Aa^x. \dots (19).$$

La constante A dépend de a ; car si dans l'équation

$$A = (b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \text{etc.}),$$

on met pour b sa valeur $a - 1$, on trouvera

$$A = (a - 1) - \frac{(a - 1)^2}{2} + \frac{(a - 1)^3}{3} - \text{etc.} \dots (20).$$

37. Pour déterminer la valeur de la constante A , cherchons, par le théorème de Maclaurin, le développement de a^x ; nous avons donc.

$$\begin{aligned} y &= a^x, \\ \frac{dy}{dx} &= Aa^x, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{Ad.a^x}{dx} = A \frac{Aa^x dx}{dx} = A^2 a^x, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &\dots\dots\dots = A^3 a^x, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Faisons $x = 0$, nous trouverons $(y) = a^0 = 1$, $(\frac{dy}{dx}) = A$,

$(\frac{d^2y}{dx^2}) = A^2$, $(\frac{d^3y}{dx^3}) = A^3$, etc. Substituant ces valeurs dans l'équation (17), nous trouvons

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc.};$$

faisons $x = \frac{1}{A}$, cette équation deviendra

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.};$$

nommons e le second membre de cette équation, elle se change en $a^A = e$, d'où l'on tire $a = e^A$; prenant les logarithmes, on a

$$\log a = \log e^A = A \log e;$$

donc
$$A = \frac{\log a}{\log e} \dots (21);$$

Le nombre e , dont la valeur est donnée par l'équation $e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$, est la base que Néper choisit pour calculer ses tables de logarithmes.

Comme la série $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \text{etc.}$, est assez convergente, on peut se borner à prendre les dix premiers termes de cette suite, et alors on trouve que e vaut environ 2,7182818. Si nous représentons par La le logarithme de a dans le système népérien, nous aurons donc $a = (2,7182818)^{La}$, ou plus simplement $a = e^{La}$; donc $\log a = \log e^{La}$ et $\log a = La \log e$; d'où nous tirerons $\frac{\log a}{\log e} = La$, ce qui réduit l'équation (21) à $A = La$, et par conséquent l'équation (19) donne

$$da^x = a^x dx \cdot La \dots (22).$$

Des différentielles logarithmiques.

38. Soit x le log de y dans le système dont la base est a ; on a $y = a^x$; donc (art. 36) $dy = A a^x dx$, d'où l'on tire

$$dx = \frac{dy}{A a^x} = \frac{dy}{\frac{\log a}{\log e} a^x} = \frac{dy \log e}{a^x \log a};$$

et comme $a^x = y$, et que $x = \log y$, l'équation précédente

devient

$$d. \log y = \frac{dy}{y} \frac{\log e}{\log a}.$$

Dans le cas où l'on prend les logarithmes dans le système népérien, $\frac{\log e}{\log a} = \frac{\log e}{\log e} = 1$, donc alors $d. \log y = \frac{dy}{y}$.

Des différentielles des sinus, cosinus et autres lignes trigonométriques, ou des différentielles des fonctions circulaires.

39. *L'arc est plus grand que le sinus, et plus petit que la tangente.*

Fig. 2 Pour le démontrer, soit AB, fig. 2, un arc qui a BE pour sinus et DA pour tangente, et prenons l'arc AB' égal à l'arc AB. En considérant la corde BB' comme une ligne droite, BB' est plus courte que l'arc BAB'. Donc la droite BE, qui est la moitié de la corde BB', est plus courte que l'arc BA, moitié de l'arc BAB'; d'où il résulte que le sinus est moindre que l'arc.

Pour démontrer que la tangente est plus grande que l'arc, nous avons

Aire du triangle DD'C > aire du secteur BAB'C;

ou en mettant les expressions géométriques de ces aires,

$$DD' \times \frac{1}{2} AC > \text{arc BAB}' \times \frac{1}{2} AC;$$

supprimant $\frac{1}{2} AC$ de part et d'autre, il reste

$$DD' > \text{arc BAB}',$$

et en prenant la moitié, on a

$$DA > \text{arc BA}.$$

40. Il résulte de ce qui précède, que la limite du rapport du sinus à l'arc est l'unité; car lorsque l'arc h représenté par AB devient nul, le sinus se confondant avec la tan-

gente, à plus forte raison le sinus se confond avec l'arc qui est compris entre la tangente et le sinus; par conséquent on a, dans le cas de la limite, $\frac{\sin h}{\text{arc } h}$ ou plutôt $\frac{\sin h}{h} = 1$.

41. Pour trouver la différentielle du sinus dont l'arc est x , supposons donc que cet arc reçoive un accroissement h ; nous savons par la Trigonométrie que

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x \dots (23).$$

Retranchant de cette fonction son état primitif, et divisant par l'accroissement h de la variable, nous aurons

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}.$$

Rassemblant entre des parenthèses les termes multipliés par $\sin x$ dans le deuxième membre, on trouvera

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h \cos x}{h} \dots (24).$$

Quand h devient 0, $\cos h - 1$ devient aussi nul et $\frac{\cos h - 1}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$; il convient donc de mettre ce

terme sous une autre forme: pour cela l'équation $\cos^2 h + \sin^2 h = 1$ me donne $\cos^2 h - 1 = -\sin^2 h$, ou $(\cos h - 1)$

$(\cos h + 1) = -\sin^2 h$; d'où je tire $\cos h - 1 = -\frac{\sin^2 h}{\cos h + 1}$;

substituant cette valeur dans l'équation (24), cette équation devient

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{\cos h + 1} \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \dots (25).$$

Dans le cas de $h = 0$, $\frac{\sin h}{h} = 1$ et $\frac{\sin h}{\cos h + 1} = \frac{0}{2} = 0$;

l'équation (25) se réduit donc à $\frac{d. \sin x}{dx} = \cos x$; d'où l'on déduit $d. \sin x = dx \cos x$.

42. Dans cette démonstration, le rayon des tables a été pris pour unité; mais si l'on voulait la différentielle d'un sinus dont le rayon serait a , au lieu d'employer l'équation (23), on se servirait de celle-ci :

$$\sin(x+h) = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x}{a}.$$

Dans le résultat précédent, il faudrait donc restituer la constante a , ce qui donnerait $d. \sin x = \frac{dx \cos x}{a}$ pour la différentielle du sinus d'un arc dont le rayon est a .

Fig. 3.

43. On peut parvenir à la différentielle de $\sin x$ par des considérations géométriques; car soit AB, fig. 3, l'arc x ; BM, l'arc h ; la perpendiculaire BP sera donc $\sin x$, et la perpendiculaire MQ sera $\sin(x+h)$; cela posé, plus l'arc BM $= h$ diminue, plus l'angle MBC tend à devenir droit; par conséquent, dans le cas de la limite, on peut considérer l'angle MBC comme droit; alors le triangle MBD devient semblable au triangle BCP, puisque dans cette circonstance ces triangles ont leurs côtés perpendiculaires; d'où il suit qu'on a la proportion

$$BC : CP :: BM : MD,$$

ou

donc

$$r : \cos x :: BM : \sin(x+h) - \sin x,$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{BM} = \frac{\cos x}{r};$$

passant à la limite et observant que, dans ce cas, la corde BM peut être remplacée par l'arc $BM = h$, l'équation précédente deviendra...

$$\frac{d. \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{r}, \text{ et en prenant le rayon égal à l'unité,}$$

$$d. \sin x = dx \cos x.$$

44. Pour trouver la différentielle de $\cos x$, l'équation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou plutôt $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ étant différenciée (art. 21) donne $2 \sin x d. \sin x + 2 \cos x d. \cos x = 0$; d'où l'on tire

$$d. \cos x = - \frac{\sin x d. \sin x}{\cos x};$$

mettant pour $d. \sin x$ sa valeur $dx \cos x$, art. 41, et réduisant, on a $d. \cos x = -dx \sin x$.

45. On obtient la différentielle de $\tan x$ en considérant que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; différenciant cette équation par l'art. (19), on trouve

$$d. \tan x = \frac{\cos x d. \sin x - \sin x d. \cos x}{\cos^2 x};$$

mettant les valeurs de $d. \sin x$ et de $d. \cos x$, on aura

$$d. \tan x = \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx; \text{ donc}$$

$$d. \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \text{ puisque } \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

46. On sait par la Trigonométrie que le rayon est moyenne proportionnelle entre la tangente et la cotangente, et entre le cosinus et la sécante, ce qui donne

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}; \text{ en différenciant la première de ces équations (art. 19), on trouve } d. \cot x = -\frac{d. \tan x}{\tan^2 x} = -\frac{dx}{\cos^2 x \tan^2 x} = -\frac{dx}{\sin^2 x}; \text{ car de l'équation } \frac{\sin}{\cos} = \tan, \text{ on tire } \cos \tan = \sin.$$

47. L'équation $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ étant différenciée, donne

$$d. \sec x = -\frac{d. \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx = \tan x \sec x dx.$$

48. On déterminerait de même la différentielle de la cosécante; car $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; différenciant on a

$$\begin{aligned} d. \operatorname{cosec} x &= -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \frac{1}{\tan x} \operatorname{cosec} x dx = \cot x \operatorname{cosec} x dx. \end{aligned}$$

49. À l'égard du sinus verse, en différenciant l'équation $\sin \text{ verse } x + \cos x = 1$, on trouve $d. \sin \text{ verse } x = d. (1 - \cos x)$, et en effectuant la différenciation, $d. \sin \text{ verse } x = \sin x \, dx$.

De la différenciation de quelques fonctions transcendantes compliquées.

50. Les principes précédens suffiraient pour pouvoir différencier toute expression affectée de quantités transcendantes.

Soit $y = a^{b^x}$; faisons $b^x = u$, nous aurons $y = a^u$; différencions par l'art. (37), nous trouverons

$$\frac{dy}{du} = a^u L a = a^{b^x} L a, \quad \frac{du}{dx} = b^x L b;$$

donc (art. 24) $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ou $\frac{dy}{dx} = a^{b^x} b^x L a L b$.

51. Soit encore $y = z^v$; prenant les logarithmes, on a $\log y = v \log z$; donc $d. \log y = v d. \log z + \log z \, dv$; mettant pour les différentielles logarithmiques leurs valeurs (art. 38), nous trouverons

$$\frac{dy}{y} = v \frac{dz}{z} + \log z \, dv, \text{ et par conséquent}$$

$$dy = y \left(v \frac{dz}{z} + \log z \, dv \right), \text{ ou plutôt } dy = z^v \left(v \frac{dz}{z} + \log z \, dv \right).$$

Au moyen de cette différentielle, on trouvera facilement celle de $y = z^{t^v}$; car soit $t^v = v$, l'équation se réduit à $y = z^v$; or, les équations $y = z^v$ et $v = t^v$, qui sont de même forme que l'équation dont nous venons de trouver la différentielle, donneront

$$dy = z^v \left(v \frac{dz}{z} + \log z \, dv \right);$$

$$dv = t^v \left(v \frac{dt}{t} + \log t \, du \right).$$

Substituant dans la valeur de dy donnée par cette avant-dernière équation celles de dv et de v , nous aurons

$$dy = z^u \left[t^u \frac{dz}{z} + \log z t^u \left(u \frac{dt}{t} + \log t du \right) \right] = z^u t^u \left(\frac{dz}{z} + u \log z \frac{dt}{t} + \log z \log t du \right).$$

Théorème de Taylor.

52. Avant que d'aller plus loin, nous remarquerons que dans le Calcul différentiel une expression telle que $\frac{dy}{dx}$, signifie qu'une fonction y d'une ou de plusieurs variables a été différenciée par rapport à la variable x et divisée par dx ; par exemple, si l'on avait $y = ax^2u^3z^4$, l'expression $\frac{dy}{dx}$ se trouverait en regardant u et z comme constans, et en différenciant par rapport à x et divisant ensuite par dx : ainsi on aurait $\frac{dy}{dx} = 2axu^3z^4$. On trouverait de même $\frac{dy}{dz} = 4ax^2z^3u^3$, et $\frac{dy}{du} = 3ax^2z^4u^2$. Si l'on avait $y = x^2 + z^2$, $\frac{dy}{dx}$ serait $2x$.

53. Si dans une fonction y de x , la variable x se change en $x + h$, on a le même coefficient différentiel lorsque x est variable et h constant, que lorsque h est variable et x constant.

Pour le démontrer, si dans l'équation $y = fx$, nous mettons $x + h = x'$ à la place de x , nous aurons $y' = fx'$; la différentielle de fx' sera égale à une autre fonction de x' représentée par $\phi x'$ et multipliée par dx' , par conséquent $dy' = \phi x' dx'$, ou en mettant pour x' sa valeur $x + h$, on aura

$$dy' = \phi(x + h) d(x + h).$$

Or, le seul changement qu'apporte dans cette différentielle

l'hypothèse de x variable et de h constant, n'est que dans le facteur $d(x+h)$, qui se réduit à dx ; l'on a donc alors

$$dy' = \varphi(x+h) dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi(x+h). \dots (26).$$

Si, au contraire, on fait x constant et h variable, le facteur $d(x+h)$ se réduit à dh , et l'on a

$$dy' = \varphi(x+h) dh,$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dh} = \varphi(x+h). \dots (27);$$

égalant ces deux valeurs de $\varphi(x+h)$, il nous vient

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

Par exemple, si l'on avait $y = ax^3$, en mettant $x+h$ à la place de x on trouverait

$$\frac{dy'}{dx} = 3a(x+h)^2 = \frac{dy'}{dh},$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

54. Les équations (26) et (27) étant différenciées par rapport à $x+h$, donnent encore les résultats égaux

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \varphi'(x+h) d(x+h),$$

$$\frac{d^2y'}{dh^2} = \varphi'(x+h) d(x+h).$$

Faisons h constant dans la première équation, et x constant dans la seconde, nous aurons

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = \varphi'(x+h) dx, \quad \frac{d^2y'}{dh^2} = \varphi'(x+h) dh;$$

d'où nous tirerons

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} = \frac{d^2 y'}{dh^2}.$$

On conclura par le même raisonnement que $\frac{d^3 y'}{dx^3} = \frac{d^3 y'}{dh^3}$ et que $\frac{d^4 y'}{dx^4} = \frac{d^4 y'}{dh^4}$, et ainsi de suite.

55. Cela posé, soit y' une fonction de $x + h$; cette fonction étant développée par rapport aux puissances de h , supposons qu'on ait

$$y' = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \dots (28),$$

A, B, C , etc. étant des fonctions inconnues de x qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet, en différenciant par rapport à h , et en divisant par dh , on aura

$$\frac{dy'}{dh} = A + 2Bh + 3Ch^2 + \text{etc.};$$

différenciant ensuite par rapport à x et divisant par dx , nous aurons

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx} h + \frac{dB}{dx} h^2 + \text{etc.}$$

Les premiers membres de ces équations étant égaux, en vertu de l'art. 53, les seconds membres seront identiques; égalant donc entre eux les coefficients des mêmes puissances de h , on trouvera

$$A = \frac{dy}{dx}, B = \frac{dA}{2dx}, C = \frac{dB}{3dx}, D = \frac{dC}{4dx}, \text{etc.}$$

Substituant la valeur de A , donnée par la première de ces équations, dans la seconde, on aura $B = \frac{1}{1.2} \frac{d^2 y}{dx^2}$; substituant cette valeur dans celle de C , on aura $C = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3 y}{dx^3}$; ainsi de suite,

Au moyen de ces valeurs de A, de B, de C, etc., l'équation (28) deviendra

$$y' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ou en mettant pour y' sa valeur,

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

ce qui est la formule de Taylor.

Application de la formule de Taylor au développement en série de diverses fonctions.

56. Soit $y' = \sqrt{x+h}$; on a donc $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8 \sqrt{x^5}};$$

substituant dans la formule de Taylor, on a

$$\sqrt{x+h} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{h^2}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{16} \frac{h^3}{\sqrt{x^5}}, \text{ etc.}$$

57. Soit $y' = \sin(x+h)$, d'où il suit que $y = \sin x$; on peut donc former ainsi les coefficients différentiels successifs,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \cos x, \text{ etc.};$$

substituant dans la formule de Taylor, on trouve

$$\begin{aligned}\sin(x+h) &= \sin x + \cos x \frac{h}{1} - \sin x \frac{h^2}{1.2} - \cos x \frac{h^3}{2.3} \\ &\quad + \sin x \frac{h^4}{2.3.4} + \cos x \frac{h^5}{2.3.4.5}, \text{ etc.};\end{aligned}$$

faisant $x=0$, alors $\sin x=0$ et $\cos x=1$, et ce développement se réduit à

$$\sin h = h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2.3.4.5}, \text{ etc.}$$

Si l'on prenait $y = \cos(x+h)$, on trouverait, en opérant comme dans l'exemple précédent, que

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

58. Développons encore $\log(x+h)$; nous avons

$$y = \log(x+h), \text{ donc } y = \log x;$$

$$dy = d.\log x = \frac{dx}{x}, \text{ donc } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

On obtiendra ensuite, par des différenciations successives,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}, \text{ etc.};$$

substituant ces valeurs dans la formule de Taylor, on a

$$\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3}, \text{ etc.}$$

59. On pourrait facilement, au moyen de cette formule, trouver la différentielle d'un logarithme, si cette formule n'eût pas été trouvée par la différenciation, mais par la seule Algèbre [note première (*)]. En effet, cette formule donne

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \text{etc.}$$

(*) Voyez les notes à la fin de l'Ouvrage.

passant à la limite, on a

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{1}{x},$$

ou

$$d.\log x = \frac{dx}{x}.$$

Connaissant la différentielle d'un logarithme, il serait aisé de trouver celle de a^x ; car en faisant $y = a^x$, et en prenant les logarithmes dans le système népérien, on a

$$Ly = La^x \text{ ou } Ly = xLa,$$

et en différenciant,

$$\frac{dy}{y} = dx La;$$

d'où l'on tire

$$dy = y dx La = a^x dx La.$$

60. On peut déduire le théorème de Maclaurin de celui de Taylor, de la manière suivante : on a, par le théorème de Taylor,

$$f(x+h) = fx + \frac{d.fx}{dx} h + \frac{d^2.fx}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3.fx}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Appelons (fx) ce que devient fx quand on y fait $x=0$, $\left(\frac{d.fx}{dx}\right)$ ce que devient $\frac{d.fx}{dx}$ quand on y fait $x=0$, ainsi de suite pour les autres coefficients différentiels; la formule de Taylor, quand on fera $x=0$, deviendra donc

$$fh = (fx) + \left(\frac{d.fx}{dx}\right) h + \left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right) \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Dans cette équation, h entre dans fh comme x entrait dans fx , de sorte que si on change h en x , fh deviendra fx ; et comme il ne reste plus de traces de x , ce changement est permis, puisqu'il importe peu de substituer une

lettre ou une autre à h : en faisant donc ce changement on trouve

$$fx = (fx) + \left(\frac{d.fx}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.},$$

ce qui est le théorème de Maclaurin.

De la différenciation des équations à deux variables.

61. Soit

$$F(x, y) = 0 \dots (29),$$

une équation entre deux variables. En résolvant cette équation par rapport à y , on trouvera $y = \varphi x$; imaginons que l'on ait substitué cette valeur dans l'équation (29), celle-ci deviendra $F(x, \varphi x) = 0$, ou pour plus de simplicité

$$fx = 0,$$

équation identique, et dans laquelle tous les termes doivent se détruire, quelque valeur que l'on donne à x . Par exemple, si cette équation ne monte qu'au troisième degré, on pourra la représenter par

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

et en mettant une valeur quelconque pour x , elle sera toujours satisfaite; donc, en mettant $x + h$ à la place de x , on aura encore

$$A(x + h)^3 + B(x + h)^2 + C(x + h) + D = 0,$$

c'est-à-dire que si l'on a $fx = 0$, quel que soit x , on aura encore $f(x + h) = 0$; retranchant de cette équation celle-ci

$$fx = 0, \text{ il restera } f(x + h) - fx = 0;$$

donc aussi

$$\frac{f(x + h) - fx}{h} = 0,$$

Or,

$$f(x+h) = fx + Ah + Bh^2 + \text{etc.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = A + Bh + \text{etc.};$$

le premier membre de cette équation étant nul, on a donc

$$A + Bh + \text{etc.} = 0; \text{ et passant à la limite } \frac{d.fx}{dx} = A = 0,$$

et par conséquent $d.fx = Adx = 0$, ou en restituant y ,

$$d.F(x,y) = Adx = 0.$$

Ceci nous apprend qu'en regardant y comme une fonction de x , si l'on différencie l'équation $F(x,y) = 0$, on pourra égaler le résultat à zéro; ce qui servira à déterminer la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

Soit donc

$$F(x,y) = x^3 + 3ay - y^3 = 0 \dots (30);$$

différenciant par les procédés ordinaires, et observant que par la démonstration précédente on doit égaler ce résultat à zéro, on a

$$3x^2dx + 3ady - 3y^2dy = 0 \dots (31);$$

de cette équation on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y - 3a} \dots (32).$$

62. Si l'on compare le procédé qui nous a fait obtenir cette valeur avec celui que nous avons employé jusqu'à présent, on verra qu'en opérant d'après cette première méthode, il aurait fallu d'abord mettre l'équation (30) sous la forme $y = fx$, et par conséquent résoudre l'équation par

rapport à y , pour en déduire ensuite par la différenciation la valeur de $\frac{dy}{dx}$. En suivant cette marche nous trouverions d'abord

$$y = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2},$$

et ensuite, par la différenciation,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}}.$$

Cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ se présente sous une forme différente de celle qui nous est offerte par l'équation (32); mais en mettant dans l'équation (32) la valeur de y , cette équation deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2x}{2\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}},$$

comme nous venons de le trouver. L'équation (31) est la différentielle première de l'équation (30).

Pour obtenir l'équation qui donne le coefficient différentiel du second ordre, c'est-à-dire $\frac{d^2y}{dx^2}$, en divisant l'équation (31) par dx , et faisant $\frac{dy}{dx} = p$, cette équation deviendra

$$2x + 3ap - 2yp = 0;$$

regardant y et p comme des fonctions de x , nous aurons, en différenciant,

$$2dx + 3adp - 2ydp - 2pdy = 0;$$

divisant par dx et mettant p à la place de $\frac{dy}{dx}$, il viendra

$$2 + 3a \frac{dp}{dx} - 2y \frac{dp}{dx} - 2p^2 = 0.$$

d'où nous tirerons

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2p^2 - 2}{3a - 2y} \dots (33).$$

Or, puisque $p = \frac{dy}{dx}$, nous aurons $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$; mettant ces valeurs dans l'équation (33), et faisant évanouir les dénominateurs, nous obtiendrons

$$d^2y (3a - 2y) = 2dy^2 - 2dx^2 \dots (34);$$

telle sera la différentielle seconde de l'équation (30).

Pour avoir la différentielle troisième, on fera $\frac{dp}{dx} = q$, et l'équation (33) deviendra, après avoir fait évanouir le dénominateur,

$$3aq - 2yq = 2p^2 - 2;$$

on différenciera en regardant y, p, q comme des fonctions de x , et l'on trouvera la différentielle troisième, ainsi de suite.

63. Au lieu d'employer les lettres p, q, r , etc., pour effectuer les opérations, on parviendrait au même résultat en différenciant l'équation (31) et en mettant dy pour la différentielle de y , d^2y pour celle de dy , d^3y pour celle de d^2y , etc., et en regardant dx comme constant; on trouverait de cette manière.

$$2dx^2 + 3ad^2y - 2dy^2 - 2yd^2y = 0,$$

équation qui est la même que l'équation (34).

64. Donnons maintenant l'expression générale de la différentielle de l'équation $f(x, y) = c$. Pour cela représentons $f(x, y)$ par u ; nous aurons, en différenciant cette fonction par rapport à x , le terme $\frac{du}{dx} dx$, et en la différenciant par rapport à y , nous aurons ce second terme $\frac{du}{dy} dy$; en

sorte que $d.f(x,y)$ ou $du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$; mais si y est considéré comme une fonction de x , nous aurons, en la différenciant,

$$dy = \frac{dy}{dx} dx;$$

substituant cette valeur, nous trouverons

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} dx.$$

65. Si l'on se rappelle le théorème démontré article (24), on verra que u étant considéré comme une fonction de y , et y comme une fonction de x , le produit $\frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} dx$ n'est autre chose que la différentielle de u prise par rapport à x renfermé dans y .

66. La différentielle totale d'une fonction de x et de y étant donnée par l'équation $du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$, on a nommé les expressions $\frac{du}{dx} dx$, $\frac{du}{dy} dy$ les différentielles partielles de u .

De même, si u est une fonction de trois variables, x, y, z , indépendantes, nous aurons,

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

et les termes $\frac{du}{dx} dx$, $\frac{du}{dy} dy$, $\frac{du}{dz} dz$ seront les différentielles partielles de u .

67. Nous avons vu (art. 52), qu'une expression telle que $\frac{dy}{dx}$, indiquait que la fonction y avait été différenciée par rapport à la variable x , et divisée ensuite par dx ; il suit

de là que si l'on a l'équation $\frac{dy}{dx} = A$, et qu'on en tire

$$1 = \frac{A}{\frac{dy}{dx}},$$

on ne peut, sans démonstration, en conclure que

$$1 = A \frac{dx}{dy};$$

cār, dans cette nouvelle équation, la différenciation n'est plus faite par rapport à x , mais par rapport à y ; et l'on ne sait pas si dans cette nouvelle hypothèse de différenciation le résultat est le même.

Pour lever cette difficulté, on a démontré (art. 24) que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Si dans cette équation on fait $v = x$, elle devient

$$1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

ce qui fait voir que le changement d'hypothèse de différenciation s'accorde avec l'Algèbre.

68. Voici comment on pourrait démontrer directement, que dans la nouvelle acception que donne le signe de la division à la fraction $\frac{dx}{dy}$, l'équation suivante a lieu :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Soit,

$$\frac{y'-y}{x'-x} = A + Bb + Cb^2 + \text{etc.}$$

Donc

$$\frac{x'-x}{y'-y} = \frac{1}{A + Bh + Ch^2 + \text{etc.}}$$

Effectuant la division, ou développant à l'aide du Théorème de Maclaurin, on obtient

$$\frac{x'-x}{y'-y} = \frac{1}{A} - \frac{B}{A^2} h + \text{etc.}$$

Passant à la limite, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{A};$$

et comme $\frac{dy}{dx} = A$, il en résulte que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

De la méthode des tangentes.

69. On appelle ainsi la méthode qui donne les expressions différentielles des tangentes, sous-tangentes, normales et sous-normales. Soient x et y les coordonnées d'un point M , fig. 4, pris sur une courbe; augmentons l'abscisse. . . Fig. 4. $AP = x$ d'une quantité $PP' = h$, menons l'ordonnée $P'M'$, et par les points M et M' faisons passer une sécante $M'S$. Il est certain que plus PP' diminuera, plus PS tendra à se confondre avec la sous-tangente PT , jusqu'à ce qu'enfin $PP' = h$ devienne nul; PT sera donc la limite vers laquelle tendra PS .

Cherchons maintenant l'expression analytique de PS pour en prendre la limite: les triangles semblables $M'MQ$, MSP donnent la proportion,

$$M'Q : MQ :: MP : PS,$$

ou

$$M'Q : h :: y : PS;$$

donc

$$PS = \frac{hy}{M'Q}.$$

Pour déterminer $M'Q$, nous avons

$$M'Q = M'P' - MP;$$

or,

$$M'P' = y' = f(x + h);$$

donc

$$M'P' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

D'une autre part :

$$MP = y.$$

Si nous retranchons ces équations l'une de l'autre, il nous viendra

$$M'P' - MP \text{ ou } M'Q = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Substituant cette valeur dans celle de PS, nous trouverons

$$PS = \frac{hy}{\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}},$$

et en divisant les deux termes par h ,

$$PS = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}.$$

A la limite $h = 0$, et PS se change en PT, ce qui nous

donne $PT = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$, ou (art. 67) $PT = y \frac{dx}{dy}$, ou plutôt

$$PT = y' \frac{dx'}{dy'} = \text{sous-tangente},$$

en représentant par x' et par y' les coordonnées du point M.

Fig. 5. 70. Si à ce point M, fig. 5, nous menons une perpendiculaire MN sur MT, la sous-normale sera PN. Pour la déterminer, nous aurons

$$PT : PM :: PM : PN,$$

ou

$$y' \frac{dx'}{dy'} : y' :: y' : PN,$$

donc

$$PN = y' \frac{dy'}{dx'} = \text{sous-normale}.$$

A l'égard de la tangente et de la normale, nous avons

$$MT = \sqrt{TP^2 + PM^2},$$

$$\text{ou tangente} = \sqrt{y'^2 \frac{dx'^2}{dy'^2} + y'^2} = y' \sqrt{\frac{dx'^2}{dy'^2} + 1};$$

$$MN = \sqrt{PN^2 + PM^2},$$

$$\text{ou normale} = \sqrt{y'^2 \frac{dy'^2}{dx'^2} + y'^2} = y' \sqrt{\frac{dy'^2}{dx'^2} + 1}.$$

71. Pour trouver l'équation de la tangente, soient x' et y' , les coordonnées du point de tangence M; l'équation de la droite MT, qui passe par le point M, pourra donc être représentée par

$$y - y' = A(x - x').$$

Dans cette équation, A étant la tangente trigonométrique de l'angle MTP, cette tangente trigonométrique aura pour expression $\frac{PM}{PT}$; car on a

$$PT : PM :: 1 : \text{tang. MTP} = \frac{PM}{PT};$$

donc

$$\text{tang. MTP} = \frac{PM}{PT} = \frac{y'}{\text{sous-tang.}} = \frac{y'}{y' \frac{dx'}{dy'}} = \frac{dy'}{dx'};$$

substituant cette valeur de A dans l'équation de la tangente, cette équation devient

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x'), \text{ équation de la tangente.}$$

Celle de la normale sera donc $y - y' = -\frac{dx'}{dy}(x - x')$.

Application des formules précédentes à des exemples.

72. 1°. *Trouver la sous-tangente de la parabole.* L'équation de la parabole étant $y^2 = px$, on en tirera, en la différenciant,

$$2ydy = p dx,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}.$$

Or x' et y' étant les coordonnées du point de tangence, il faudra donc, pour avoir le coefficient différentiel qui correspond à ce point, accentuer x et y ; ainsi nous aurons

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{2y'};$$

substituant cette valeur dans celle de PT, nous obtiendrons

$$PT = \frac{2y'^2}{p},$$

et en mettant px' à la place de y'^2 , cette équation deviendra

$$PT \text{ ou sous-tangente} = 2x'.$$

2°. *Trouver la sous-normale de l'ellipse.* L'équation $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de l'ellipse rapportée au centre étant différenciée, donne

$$2b^2x dx + 2a^2y dy = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'};$$

mettant cette valeur dans celle de la sous-normale PN on obtient

$$\text{PN ou sous-normale} = -\frac{b^2}{a^2} x'.$$

3°. Trouver l'expression de la tangente au cercle. L'équation $x^2 + y^2 = r^2$, qui est celle du cercle, étant différenciée, on trouve pour le point de tangence x', y' ,

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x'}{y'}.$$

Au moyen de cette valeur, on réduira l'expression de MT à

$$\text{tangente} = y' \sqrt{\frac{y'^2}{x'^2} + 1} = y' \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{x'^2}} = y' \sqrt{\frac{r^2}{x'^2}} = \frac{ry'}{x'}.$$

Des Asymptotes des Courbes.

73. L'expression AT, fig. 6, de la distance du sommet de la courbe au point de tangence, se déduit facilement de l'équation de la tangente; car si le sommet A de la courbe est pris pour origine, la droite AT sera la distance de ce sommet, au point où l'ordonnée MP sera nulle.

L'équation de la tangente MT étant $y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x')$, il suffira donc de faire $y = 0$, dans cette équation, pour que la valeur de x , qu'on en déduira, soit celle de AT; nous obtiendrons, de cette manière,

$$\text{AT} = x' - y' \frac{dx'}{dy'}.$$

Telle sera la distance de l'origine, au point où la tangente coupe l'axe des x . Pour connaître la distance de l'origine, au point où la tangente coupe l'axe des y , il faudra calculer AB; or, AB étant l'ordonnée y , qui correspond à $x = 0$, dans l'équation de la tangente, nous aurons, dans cette hypothèse,

$$\text{AB} = y' - \frac{dy'}{dx'} x'.$$

Supposons maintenant que x' devenant infini, les valeurs de AT et de AB, fig. 7, conservent des valeurs finies; on en conclura que la Fig. 7.

droite TL ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie; donc TL sera une asymptote à la courbe.

74 Prenons pour exemple l'équation $x^2 = mx' + nx^2$; on tirera de cette équation,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m + 2nx'}{2y'};$$

donc

$$AT = x' - \frac{2y'^2}{m + 2nx'} = \frac{mx' + 2nx'^2 - 2y'^2}{m + 2nx'} = -\frac{mx'}{m + 2nx'};$$

$$AB = y' - \frac{mx' + 2nx'^2}{2y'} = \frac{2y'^2 - mx' - 2nx'^2}{2y'};$$

mettant pour y' sa valeur, et réduisant, on trouve

$$AT = -\frac{mx'}{m + 2nx'}, \quad AB = \frac{mx'}{2\sqrt{mx' + nx'^2}};$$

divisant les deux termes de ces fractions par x' , on obtiendra

$$AT = -\frac{m}{\frac{m}{x'} + 2n}, \quad AB = \frac{m}{2\sqrt{\frac{m}{x'} + n}}.$$

Lorsqu'on fait $x' = \infty$, ces valeurs se réduisent à

$$AT = -\frac{m}{2n}, \quad AB = \frac{m}{2\sqrt{n}} \dots (35);$$

donc la courbe sera susceptible d'asymptotes, pourvu, cependant, que n ne soit ni négatif, ni nul; car si n était négatif, la valeur de AB , donnée par la seconde des équations (35), deviendrait imaginaire; or, dans le cas où n est négatif, l'équation appartient à une ellipse. Cette même équation serait celle d'une parabole si n avait pour valeur zéro; mais, dans cette hypothèse, les équations (35) nous montrent que AT et AB deviennent infinis, ce qui prouve que la parabole ne peut pas avoir d'asymptotes.

De l'Équation du plan tangent à une surface courbe, et de celle de la normale à cette surface.

75. Soient $f(x, y, z) = 0$, l'équation d'une surface courbe, et...
 Fig. 8. $Ax + By + Cz + D = 0$, celle d'un plan. Si le point de tangence

M a pour coordonnées x', y', z' , ces coordonnées devront satisfaire à l'équation du plan, et l'on aura par conséquent

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0.$$

Éliminant D entre cette équation et la précédente, on trouvera, pour l'équation du plan assujéti à passer par le point x', y', z' ,

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \dots (36).$$

Menons, par le point de tangence x', y', z' , un plan parallèle au plan des x, z ; ce plan conpera la surface suivant une courbe MC, fig. 3, Fig. 8. et le plan tangent suivant une droite ML; cette droite ML devra être tangente à la courbe MC, autrement le plan tangent conperait la surface courbe.

L'équation de la droite ML peut se déduire de l'équation (36); car cette droite ML étant l'intersection du plan tangent, par un plan parallèle au plan des x, z , a, dans tous ses points, des valeurs égales pour y ; et comme le point M est sur cette droite, on a donc $y = y'$, on $y - y' = 0$. Ce qui réduit l'équation (36) à

$$A(x - x') + C(z - z') = 0.$$

Cette équation exprimera donc la relation qui existe entre les coordonnées z et x d'un point quelconque pris sur la droite ML, et par conséquent sera l'équation de cette droite. On pourra l'écrire ainsi:

$$z - z' = -\frac{A}{C}(x - x') \dots (37).$$

D'une autre part, l'équation de la courbe MC s'obtiendra de même en regardant y comme constant, dans l'équation de la surface courbe $f(z, y, x) = 0$.

Si l'on veut exprimer maintenant la condition que la droite ML soit tangente à la courbe MC, il faut donc (art. 71) que le coefficient de $(x - x')$ de l'équation (37) soit égal à la valeur de $\frac{dz'}{dx'}$ tirée de l'équation de la courbe MC.

Or, l'équation de cette courbe étant celle de la surface dans laquelle on ferait y constant, il suffit de différentier l'équation de cette surface, et d'en tirer $\frac{dz}{dx}$; car, d'après l'art. 52, la notation $\frac{dz}{dx}$ suppose qu'on a regardé y comme constant dans la différenciation.

Il suit de là, qu'en accentuant z' et x' , après avoir opéré, on a, pour la condition que ML soit tangente à MC ,

$$-\frac{A}{C} = \frac{dz'}{dx'}, \text{ ou plutôt } A = -C \frac{dz'}{dx'} \quad (38).$$

Si l'on mène ensuite, par le point M , un plan parallèle au plan des x, y , ce plan coupera la surface suivant une courbe MD , et le plan tangent suivant une droite MN .

On démontrerait, comme précédemment, que cette droite MN doit être tangente à la courbe d'intersection MD , et que, pour tous les points de cette droite MN , les abscisses étant égales, on doit avoir $x - x' = 0$, ce qui réduit l'équation (36) à

$$B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

d'où l'on tirera

$$z - z' = -\frac{B}{C}(y - y').$$

Cette équation étant celle de la droite MN , on exprimera la condition que cette droite est tangente à la courbe MD , en égalant le coefficient de $y - y'$ au coefficient différentiel $\frac{dz'}{dy'}$ tiré de l'équation de la surface, et l'on aura

$$-\frac{B}{C} = \frac{dz'}{dy'},$$

et par conséquent

$$B = -C \frac{dz'}{dy'} \quad (39).$$

Si l'on substitue dans l'équation (36), les valeurs de A et de B , données par les équations (38) et (39), on trouvera

$$-C \frac{dz'}{dx'}(x - x') - C \frac{dz'}{dy'}(y - y') + C(z - z') = 0,$$

d'où l'on tire, pour l'équation du plan tangent au point x', y', z' ,

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y') \quad (40).$$

76. Cherchons, par exemple, l'équation d'un plan tangent à la sphère. Les coordonnées du centre étant a, b, c , la sphère aura pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2;$$

on trouve, en différenciant,

$$(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz = 0,$$

d'où l'on déduit, d'après la notation convenue (art. 5a),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a-x}{c}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{b-y}{c}.$$

Donc l'équation du plan tangent à la sphère, au point dont les coordonnées sont x', y', z' , sera

$$z - z' = \frac{a-x'}{z'-c} (x - x') + \frac{b-y'}{z'-c} (y - y').$$

77. Si ce plan passait à l'extrémité du diamètre vertical, on aurait

$$x' = a, \quad y' = b, \quad z' = c + r.$$

Ces valeurs réduiraient l'équation du plan tangent à $z = c + r$, ce qui est l'équation d'un plan parallèle au plan des x, y .

78. Les équations de la normale au point x', y', z' peuvent se déduire facilement de l'équation du plan tangent. En effet, par la Géométrie analytique (voyez ma *Théorie des Courbes du second ordre*, pag. 278), on sait que si l'on a les équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \dots (41),$$

$$\left. \begin{aligned} x &= az + a \\ y &= bz + c \end{aligned} \right\} \dots (42),$$

la première étant celle d'un plan, et les deux autres celles d'une ligne droite, les conditions nécessaires pour que cette droite soit perpendiculaire au plan, sont qu'on ait

$$A = aC, \quad B = bC.$$

Si, après avoir fait passer tous les termes de l'équation (40) du plan tangent dans le premier membre, on la compare à l'équation (41), on trouvera, en égalant entre eux les coefficients de x , de y et de z ,

$$A = -\frac{dz'}{dx'}, \quad B = -\frac{dz'}{dy'}, \quad C = 1.$$

Donc

$$a = -\frac{dz'}{dx'}, \quad b = -\frac{dz'}{dy'};$$

substituant ces valeurs dans les équations (42), on obtiendra

$$x = -\frac{dz'}{dx'} z + a, \quad y = -\frac{dz'}{dy'} z + c.$$

Le point x', y', z' devant satisfaire à ces équations, puisqu'elles appartiennent à un point de la droite, ou a encore

$$x' = -\frac{dz'}{dx} z' + a, \quad y' = -\frac{dz'}{dy} z' + c;$$

éliminant a et c entre ces quatre dernières équations, on trouvera, pour les équations de la normale au point x', y', z' ,

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx} (z - z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy} (z - z').$$

Des fonctions qui, pour une valeur de la variable, deviennent $\frac{z}{y}$.

79. Lorsqu'une fraction telle que $\frac{Fx}{\phi x}$ devient $\frac{0}{0}$ en y substituant une valeur de x que je représenterai par a , c'est un indice que les deux termes de cette fraction ont $x - a$, ou, en général, $(x - a)^n$ pour facteur commun; si l'on pouvait l'ôter, on aurait la vraie valeur de la fraction.

Supposons donc que $x - a$ soit m fois facteur dans Fx , et n fois facteur dans ϕx (sauf, si le cas l'exige, à supposer que m et n soient égaux à l'unité ou à zéro), nous pourrions écrire

$$Fx = P(x - a)^m, \quad \phi x = Q(x - a)^n.$$

donc

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{P}{Q} (x - a)^{m-n} \dots \quad (\S).$$

Par la différenciation, nous trouverons

$$\frac{d.Fx}{dx} = \frac{dP}{dx} (x - a)^m + mP (x - a)^{m-1}.$$

Remarquons que cette valeur de $\frac{d.Fx}{dx}$ se compose de deux termes, dont l'un contient une puissance de $x - a$, moindre d'une unité que celle qui entre dans la fonction. Par la même raison, en prenant le coefficient différentiel de $\frac{d.Fx}{dx}$, on trouvera un terme affecté de $(x - a)^m$, un autre de $(x - a)^{m-1}$; et un troisième de $(x - a)^{m-2}$; ce dernier terme sera $m(m-1)P(x - a)^{m-2}$. En continuant ainsi, on verra que chaque nouvelle différenciation reproduit des termes affectés des mêmes puissances de $(x - a)$, que celles qui étaient renfermées dans la fonction différenciée, plus un terme dans lequel la puissance de $x - a$ est diminuée d'une unité; ainsi, en prenant les coefficients différentiels successifs, le terme qui contient la moins haute puissance de $x - a$ sera

à la première différenciation $mP(x - a)^{m-1}$,

à la seconde..... $m(m-1)P(x - a)^{m-2}$,

à la troisième..... $m(m-1)(m-2)P(x - a)^{m-3}$,

à la $n^{\text{ième}}$ $m(m-1)\dots\dots P(x - a)^{m-n}$.

De sorte que le coefficient différentiel de l'ordre r de Fx , sera de cette forme,

$$\frac{d^r Fx}{dx^r} = X(x-a)^n + X'(x-a)^{n-1} + X''(x-a)^{n-2} + X'''(x-a)^{n-3} \dots \\ + m(m-1)(m-2) \dots P(x-a)^{n-r}.$$

Ce que nous disons de Fx pouvant s'appliquer à ϕx , nous trouverons, pour la différentielle de l'ordre r de la fraction proposée, un résultat de cette forme,

$$\frac{d^r Fx}{dx^r} = \frac{X(x-a)^n + X'(x-a)^{n-1} \dots + m(m-1) \dots P(x-a)^{n-r}}{Z(x-a)^n + Z'(x-a)^{n-1} \dots + n(n-1) \dots Q(x-a)^{n-r}} \quad (44).$$

80. Cela posé, considérons trois cas :

1°. $m = n$; 2°. $m > n$; 3°. $m < n$.

Si $m = n$, et que le nombre r de différenciations effectuées soit égal à m , les binomes $(x-a)^{n-r}$, et $(x-a)^{n-r}$ se réduisent chacun à $(x-a)^0$, c'est-à-dire à l'unité; à l'égard des autres binomes $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$, etc., $(x-a)^2$, $(x-a)^1$, etc., ils sont nuls dans l'hypothèse de $x = a$; ainsi, tous les termes, hors le dernier du numérateur et le dernier du dénominateur, s'évanouissent, et l'équation (44) devient

$$\frac{\frac{d^m Fx}{dx^m}}{\frac{d^m \phi x}{dx^m}} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots P}{n(n-1)(n-2) \dots Q} = \frac{P}{Q} = \frac{Fx}{\phi x}.$$

Dans le second cas, qui est celui où l'on a $m > n$, si le nombre r de différenciations effectuées est égal à n , le binome $(x-a)^{n-r}$ se réduit à l'unité, parce que son exposant $n-r$ est nul. Les exposants $n-1$, $n-2$, etc., $m-1$, $m-2$, etc., des autres binomes, étant plus grands que $n-r$, sont positifs; par conséquent, ces binomes se réduisent chacun à zéro lorsqu'on fait $x = a$; tous les termes s'évanouissent donc, dans cette hypothèse, hors celui où entre $(x-a)^{n-r}$, et l'équation (44) se réduit à

$$\frac{\frac{d^r Fx}{dx^r}}{\frac{d^r \phi x}{dx^r}} = \frac{0}{n(n-1) \dots Q(x-a)^{n-r}} = \frac{0}{n(n-1) \dots Q} = 0.$$

Cette valeur est donc un indice qu'on a $m > n$, cas où l'équation (43) se réduit à zéro. Enfin, si l'on a $m < n$, le nombre r de différenciations exécutées, étant pris égal à m , tous les termes s'évanouissent, hors le

terme $m(m-1)\dots P(x-a)^0$, et il reste

$$\frac{\frac{d^m.Fx}{dx^m}}{\frac{d^m.px}{dx^m}} = \frac{m(m-1)\dots P}{0} = \infty.$$

cette valeur annonce donc que m surpasse n , cas où le second membre de l'équation 43 est infini.

81. De ce qui précède, résulte cette règle : *Lorsqu'on veut déterminer la vraie valeur d'une fraction $\frac{Fx}{px}$, qui devient $\frac{0}{0}$ par une valeur donnée à la variable, on différenciera séparément les deux termes de cette fraction, et ensuite on examinera si les résultats $\frac{d.Fx}{dx}$ et $\frac{d.px}{dx}$ se réduisent aussi à zéro, par la valeur hypothétique de la variable ; si cela est, on prendra les coefficients différentiels des expressions $\frac{d.Fx}{dx}$ et $\frac{d.px}{dx}$, et l'on verra si, dans la même hypothèse de la variable, ces coefficients différentiels se réduisent chacun à zéro ; en continuant ainsi cette vérification, si l'on trouve, après un certain nombre de différenciations, que les deux termes de la fraction ne s'évanouissent point par la valeur donnée à la variable, cette dernière fraction sera la vraie valeur de $\frac{Fx}{px}$; mais si le numérateur seulement devient 0 par la valeur de x , l'expression $\frac{Fx}{px}$ sera nulle ; enfin, si ce n'est que le dénominateur qui s'évanouisse par la valeur de x , l'expression $\frac{Fx}{px}$ sera infinie,*

82. Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{Fx}{px} = \frac{x^3 - b^3}{4(x-b)};$$

cette fraction devenant $\frac{0}{0}$ lorsque $x = b$, si nous voulons en avoir la vraie valeur, nous différencierons ses deux termes, et nous obtiendrons $\frac{3x^2}{4}$; et comme les deux termes de cette fraction ne deviennent pas nuls dans l'hypothèse de $x = b$, la vraie valeur de la fraction proposée, lorsque $x = b$, est donc $\frac{3b^2}{4}$.

83. Nous prendrons encore pour exemple la fraction

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 6x^2 + 8x - 3};$$

cette fraction se réduisant à $\frac{0}{0}$, lorsque $x = 1$, nous différencierons ses deux termes pour en obtenir la valeur, et nous trouverons

$$\frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 12x + 8}.$$

les deux termes de cette fraction étant encore nuls dans l'hypothèse de $x = 1$, nous différencierons encore, et nous obtiendrons

$$\frac{6x}{12x^2 - 12};$$

le dénominateur seul se réduit à zéro lorsque l'on fait $x = 1$; donc la fraction proposée, dans l'hypothèse de $x = 1$, est infinie.

84. Si l'on appliquait la même règle à la fraction

$$\frac{a^x - b^x}{x},$$

qui devient $\frac{0}{0}$, dans l'hypothèse de $x = 0$, on trouverait, en différenciant les deux termes de cette fraction,

$$\frac{a^x \log a - b^x \log b}{1},$$

expression dont le numérateur ne devient pas nul lorsque $x = 0$, et qui, par conséquent, donne $\log a - \log b$ pour la valeur que prend la fraction proposée lorsque $x = 0$.

Il est bien évident que le facteur commun aux deux termes de la fraction proposée est $x = 0$, c'est-à-dire x ; mais comment reconnaître ce facteur dans $a^x - b^x$? Pour y parvenir, nous remarquerons que, d'après l'article (37),

$$a^x = 1 + A \frac{x}{1} + \frac{A^2 x^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$b^x = 1 + B \frac{x}{1} + \frac{B^2 x^2}{1.2} + \text{etc.};$$

donc en prenant la différence

$$a^x - b^x = (A - B)x + \frac{(A^2 - B^2)}{1.2}x^2 + \text{etc.},$$

et l'on voit que x est facteur commun de $a^x - b^x$.

85. Il ne faut pas cependant croire que la règle que nous venons de donner suffise pour tous les cas : la démonstration précédente est fondée sur ce que les exposans m et n sont des nombres entiers; mais s'ils étaient fractionnaires, on ne pourrait obtenir, par des différenciations successives, un terme où $x - a$ se trouvât élevé à la puissance 0; par consé-

quent, on ne pourrait, par le procédé que nous avons employé, dégager la fraction du facteur commun.

Soit donc pour plus de généralité, l'expression

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{P(x-a)^{\alpha} + Q(x-a)^{\zeta} + R(x-a)^{\gamma} + \text{etc.}}{P'(x-a)^{\alpha'} + Q'(x-a)^{\zeta'} + R'(x-a)^{\gamma'} + \text{etc.}},$$

dans laquelle α , ζ , γ , etc., sont positifs et croissans, ainsi que α' , ζ' , γ' , etc. Cette expression se réduisant à $\frac{0}{0}$ lorsque $x = a$, nous pourrions, au lieu de changer x en a , changer x en $a + h$, en nous réservant de faire $h = 0$, après avoir réduit; alors l'hypothèse sera la même que si nous eussions fait immédiatement $x = a$, et nous aurons

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{Ph^{\alpha} + Qh^{\zeta} + Rh^{\gamma} + \text{etc.}}{P'h^{\alpha'} + Q'h^{\zeta'} + R'h^{\gamma'} + \text{etc.}} \dots (45).$$

En considérant α et α' , qui sont les plus petits exposans dans chacune de ces suites, il peut arriver trois cas :

$$1^{\circ}. \alpha > \alpha'; \quad 2^{\circ}. \alpha = \alpha'; \quad 3^{\circ}. \alpha < \alpha'.$$

Dans le premier cas, en divisant par $h^{\alpha'}$ les deux termes de la fraction (45), on a

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{Ph^{\alpha-\alpha'} + Qh^{\zeta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'} + \text{etc.}}{P' + Q'h^{\zeta'-\alpha'} + R'h^{\gamma'-\alpha'} + \text{etc.}}, \dots (46);$$

par hypothèse, α surpasse α' , par conséquent le nombre $\alpha - \alpha'$ sera positif; à plus forte raison $\zeta - \alpha'$, etc., $\gamma - \alpha'$ le sont aussi, puisque α , ζ , γ , etc., vont en augmentant; $\zeta' - \alpha'$, $\gamma' - \alpha'$, etc., seront aussi des quantités positives, par la raison que les expressions α' , ζ' , γ' , etc., allant en croissant, α' est moindre que ζ' , que γ' , etc. Cela posé, si l'on fait $h = 0$, tous les termes du second membre de l'équation (46) s'évanouissent, hors P' ; donc cette équation se réduit alors à

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{0}{P'} = 0.$$

Dans le second cas, où $\alpha = \alpha'$, le terme $Ph^{\alpha-\alpha'}$ se réduit à $Ph^0 = P$; donc, d'après l'inspection de l'équation (46), on voit que, lorsque $x = a$, $\frac{Fx}{\phi x}$ se réduit à $\frac{P}{P'}$.

Enfin, dans le troisième cas, où l'on a $\alpha < \alpha'$, en divisant par h^{α} , on

écrira ainsi l'équation (45) :

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{P + Qh^{c-a} + Rh^{c-a} + \text{etc.}}{P'h^{c'-a} + Q'h^{c'-a} + R'h^{c'-a} + \text{etc.}};$$

et l'on voit que l'hypothèse de $h = 0$ réduit cette équation à

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{P}{0} = \infty.$$

86. Prenons pour exemple la fraction

$$\frac{(x^3 - 3ax + 2a^3)^{\frac{2}{3}}}{(x^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}},$$

qui, lorsque $x = a$, se réduit à $\frac{0}{0}$. Si dans cette fraction on met $a + h$ à la place de x , elle devient

$$\begin{aligned} \frac{(h^3 - ah)^{\frac{2}{3}}}{(3a^2h + 3ah^2 + h^3)^{\frac{1}{3}}} &= \frac{(h-a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{(h-a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(h-a)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{1}{3}}}{(3a^2 + 3ah + h^2)^{\frac{1}{3}}}; \end{aligned}$$

aisant $h = 0$, on obtient

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{0}{(3a^2)^{\frac{1}{3}}} = 0.$$

87. Si une valeur de x rendait infinis les deux termes de la fraction $\frac{Fx}{\phi x}$, on diviserait ces deux termes par $Fx \times \phi x$, et l'on aurait

$$\frac{Fx}{\phi x} = \frac{1}{\frac{\phi x}{Fx}} = \frac{1}{\frac{1}{Fx}}.$$

88. Enfin, si l'on avait un produit MN , dans lequel l'hypothèse de $x = 0$ rendit l'un des facteurs nul et l'autre infini; soit M le facteur qui devient nul par la valeur de x , qui rend N infini; on écrirait ainsi ce produit :

$$MN = \frac{M}{\frac{1}{N}}.$$

Et comme alors $\frac{1}{N}$ serait 0, l'expression $\frac{M}{\frac{1}{N}}$ se réduirait à $\frac{0}{0}$.

Des maxima et minima, dans les fonctions d'une seule variable.

89. On peut, dans la série de Taylor, donner une valeur à l'accroissement h , telle que l'un des termes de la série devienne plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. En effet, cette série étant représentée par

$$y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

si l'on veut que $\frac{dy}{dx} h$, par exemple, devienne plus grand que la somme de tous les autres termes, écrivons ainsi la partie de la série comprise depuis ce terme :

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} + \text{etc.} \right) h \dots (47).$$

Or, quand on fait $h = 0$, la partie $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3}$ etc. s'anéantissant, on conçoit qu'elle peut être rendue aussi petite qu'on voudra, lorsqu'on prendra h très près de zéro, et être alors surpassée par $\frac{dy}{dx}$, qui est indépendant de h . Soit

donc Z ce que devient dans ce cas $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}$ La série

(47) se réduit à $\left(\frac{dy}{dx} + Z \right) h$; et comme alors on a $\frac{dy}{dx} > Z$,

ou $\frac{dy}{dx} h > hZ$, en multipliant par h , il en résulte que le

terme $\frac{dy}{dx} h$ est plus grand que la somme de tous les suivants.

On démontrerait la même chose pour tout autre terme à l'égard de ceux qui le suivent.

90. Soit $y = \phi x$, une équation entre deux variables. On peut toujours considérer cette équation comme celle d'une

courbe dont les différentes valeurs de la fonction y seraient les ordonnées ; on dit que cette fonction y est à son minimum, lorsqu'après avoir diminué successivement, elle est sur le point de recommencer à croître.

Soit, par exemple, la courbe MBN, fig. 9, qui a pour Fig. 9.
équation $y = b + cx^2$; on voit que les ordonnées $mp, m'p',$ etc., vont en diminuant jusqu'au point B ; mais que depuis ce point, les ordonnées $qn, q'n',$ etc. vont toujours en croissant ; ainsi l'ordonnée AB est le minimum de la fonction y .

91. On dit de même qu'une fonction y est parvenue à son maximum, lorsqu'après s'être accrue successivement, elle est arrivée au point passé lequel elle commence à décroître.

La courbe CDE, fig. 10, dont l'équation est $y = b - cx^2$, nous présente un exemple de ce cas au point D, puisque les ordonnées qui suivent et précèdent immédiatement AD, sont Fig. 10.
plus petites que AD : cette ordonnée AD est donc un maximum.

92. Il y a des courbes qui n'ont qu'un maximum, d'autres qu'un minimum ; quelques-unes ont l'un et l'autre ; d'autres n'en sont pas susceptibles.

On voit, par exemple, que la courbe MBN, fig. 9, dont Fig. 9.
l'équation est $y = b + cx^2$, ne peut avoir un maximum, puisque, d'après la nature de son équation, les ordonnées vont toujours en croissant.

Le cercle CBD, fig. 11, dont l'équation est

$$a^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2,$$

a un maximum et un minimum, qui correspondent à la même abscisse AP : le maximum est PD, et le minimum Fig. 11.
est BP.

93. Lorsqu'une fonction y d'une variable x , a un maximum ou un minimum, ce maximum ou ce minimum serait déterminé, si l'on connaissait l'abscisse qui y correspond : par exemple, si dans une courbe dont l'équation est $y = \phi x$, on connaissait la valeur a de l'abscisse x , qui correspond

au maximum ou au minimum, il suffirait de faire $x = a$, dans l'équation $y = \phi x$, pour déterminer la valeur de y , qui est le maximum ou le minimum demandé.

Fig. 12. 94. Soit donc $y = fx$, une ordonnée PM, fig. 12, qui est parvenue à son maximum; si l'abscisse AP reçoit un accroissement h représenté par PP', et qu'on porte aussi h de P en P'', on aura, pour les conditions que PM soit un maximum,

$$P'M' < PM, \quad P''M'' < PM$$

ou

$$f(x + h) < fx, \quad f(x - h) < fx.$$

Fig. 13. Si au contraire PM, fig. 13, est un minimum, en représentant la valeur de x , qui correspond au minimum par AP, et en prenant PP' = PP'' = h , nous aurons pour les conditions du minimum,

$$P'M' > PM, \quad P''M'' > PM.$$

ou

$$f(x + h) > fx, \quad f(x - h) > fx.$$

Ainsi, lorsque $f(x + h)$ et $f(x - h)$, seront en même temps plus petits que fx , il y aura un maximum, et si ces deux fonctions sont en même temps plus grandes que fx , il y aura un minimum; enfin, si l'une de ces fonctions est plus grande et l'autre moindre que fx , il n'y aura ni maximum ni minimum.

95. Cherchons donc dans quels cas ces conditions peuvent être remplies: pour cet effet, nous avons, par le théorème de Taylor,

$$f(x + h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \quad (48).$$

D'une autre part, si dans cette formule on change h en $-h$, on trouve

$$f(x - h) = y - \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \quad (49).$$

Pour que $y = fx$ soit un maximum ou un minimum, il faut donc que ces deux développemens soient tous deux plus grands ou tous deux moindres que y ; or, cela ne peut être, à moins que $\frac{dy}{dx}$ ne soit nul. En effet, si l'on donne une valeur très petite à h , on pourra toujours faire en sorte que $\frac{dy}{dx}h$ surpasse la somme algébrique de tous les termes qui le suivent. Dans ce cas, le signe qui affectera $\frac{dy}{dx}h$ sera le même que celui de $\frac{dy}{dx}h$, joint aux termes qui le suivent : ainsi, dans cette hypothèse, si $\frac{dy}{dx}h$ est positif dans l'un des développemens (48) et (49), ce développement sera plus grand que y , et sera moindre que y , si $\frac{dy}{dx}h$ est négatif. Le signe qui affecte $\frac{dy}{dx}h$ étant contraire dans ces développemens, il faut que si $\frac{dy}{dx}h$ est positif dans l'un, il soit négatif dans l'autre ; d'où il suit que l'une des quantités $f(x + h)$ et $f(x - h)$, sera plus grande que fx , et que l'autre sera moindre que fx .

Si $\frac{dy}{dx}h$ n'est pas nul, il ne pourra donc y avoir de maximum ni de minimum ; mais si $\frac{dy}{dx} = 0$, alors les développemens (48) et (49) se réduisent à

$$f(x + h) = y + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$f(x - h) = y + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Dans ce cas, le signe des termes qui suivent y dépendra de $\frac{d^3y}{dx^3}$, si l'on prend h assez petit pour que ce terme surpasse la somme de tous ceux qui le suivent; et comme $\frac{d^3y}{dx^3}$ a le même signe dans les deux développemens, il en résultera que si $\frac{d^3y}{dx^3}$ est positif, les deux fonctions de $(x + h)$ et de $(x - h)$ seront plus grandes que fx ; dans ce cas, fx sera un minimum. De même, si $\frac{d^3y}{dx^3}$ est négatif, on voit que fx sera un maximum.

96. Pour compléter cette théorie, nous remarquerons que outre $\frac{dy}{dx} = 0$, on peut avoir encore $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; dans ce cas, il ne peut y avoir maximum ou minimum, que lorsque $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Alors le signe des quantités qui suivent y dépendra de $\frac{d^4y}{dx^4}$, quand on prendra h très petit; et l'on prouvera que si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est positif, fx est un minimum, et que si $\frac{d^4y}{dx^4}$ est négatif, fx est un maximum; ainsi de suite.

En général, lorsque le premier coefficient qui ne s'évanouit pas, est d'ordre pair, il y a un minimum s'il est positif, et un maximum s'il est négatif.

97. Pour premier exemple, prenons la fonction $a - bx + x^2$; nous aurons donc

$$y = a - bx + x^2;$$

différenciant et divisant par dx , nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = -b + 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2.$$

Cette valeur positive de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous apprend que la fonction a:

un minimum. Pour déterminer l'abscisse qui correspond à ce minimum, nous égalons à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ce qui nous donnera $x = \frac{b}{2}$; si l'on substitue cette valeur de x dans celle de y , on trouvera $y = a - \frac{b^2}{4}$ pour le minimum cherché.

98. Soit encore la fonction $a^4 + b^3x - c^2x^2$; différenciant l'équation $y = a^4 + b^3x - c^2x^2$, et divisant par dx , nous trouverons,

$$\frac{dy}{dx} = b^3 - 2c^2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2c^2.$$

Par la valeur négative de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on voit qu'il y a un maximum dans la fonction; l'équation $b^3 - 2c^2x = 0$ nous donne $x = \frac{b^3}{2c^2}$ pour l'abscisse qui correspond à ce maximum; et en substituant cette valeur de x dans celle de y , on trouvera

$$y = a^4 + \frac{b^6}{4c^2}.$$

99. Soit encore l'équation

$$y = 3a^2x^3 - b^4x + c^5;$$

nous trouverons, en opérant comme ci-dessus,

$$\frac{dy}{dx} = 9a^2x^2 - b^4, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 18a^2x;$$

égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous avons

$$9a^2x^2 - b^4 = 0, \text{ d'où } x = \pm \frac{b^2}{3a};$$

ces deux valeurs de x étant mises successivement dans celle

de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous apprennent qu'il y a dans la fonction un minimum et un maximum. Le minimum correspond à l'abscisse $x = +\frac{b^2}{3a}$, et le maximum à l'abscisse $x = -\frac{b^2}{3a}$; en mettant ces valeurs dans celle de y , nous trouverons $y = c^3 - \frac{2b^3}{9a}$ pour le minimum, et $y = c^3 + \frac{2b^3}{9a}$ pour le maximum.

Application de la théorie des maxima et minima à la solution de divers problèmes.

PROBLÈME I.

100. *Partager un nombre en deux parties telles, que le produit de l'une par l'autre soit le plus grand possible.*

Soit a ce nombre, et x l'une des parties; l'autre sera $a - x$. Donc $x(a - x)$ est la quantité dont on veut chercher le maximum: différenciant et divisant par dx , l'équation $y = x(a - x) = ax - x^2$, nous trouverons

$$\frac{dy}{dx} = a - 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous montre que la fonction renferme effectivement un maximum. Si ce coefficient se fût trouvé d'un signe contraire, le problème aurait été impossible. En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous trouverons $x = \frac{1}{2}a$, ce qui nous annonce qu'il faut que le nombre a soit partagé en deux parties égales, pour que le produit soit un maximum.

PROBLÈME II.

101. *Entre tous les cylindres inscrits dans un cône droit, déterminer celui qui a le plus grand volume.*

Soit a , fig. 14, la hauteur SC du cône, b le rayon AC de

sa base, et x la distance SD du sommet au centre du cercle supérieur du cylindre.

Les triangles semblables SAC, SED nous donneront

$$SC : AC :: SD : ED,$$

ou

$$a : b :: x : ED,$$

donc

$$ED = \frac{bx}{a}.$$

Soit $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence; on sait que le cercle, dont le rayon est r , a pour surface πr^2 .

Donc le cercle EGF, qui a $\frac{bx}{a}$ pour rayon, a pour surface $\frac{\pi b^2}{a^2} x^2$; multipliant cette surface par la hauteur DC du cylindre, c'est-à-dire par $a - x$, nous aurons $\frac{\pi b^2}{a^2} x^2 (a - x)$ pour le volume du cylindre; ainsi l'équation à différencier est

$$y = \frac{\pi b^2}{a^2} (ax^2 - x^3);$$

on déduit de cette équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b^2}{a^2} (2ax - 3x^2) \text{ et } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi b^2}{a^2} (2a - 6x);$$

égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on a

$$\frac{\pi b^2}{a^2} (2ax - 3x^2) = 0, \text{ ou plutôt } 2ax - 3x^2 = 0;$$

équation qui est le produit des facteurs x et $2a - 3x$, et donne par conséquent $x = 0$, ou $x = \frac{2a}{3}$; la valeur $x = 0$ ne peut correspondre à un maximum, puisque, dans cette

hypothèse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{2\pi b^2}{a}$, nombre positif. Cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ indique un minimum; et en effet, quand $x = 0$, le cylindre se réduit à l'axe du cône (car plus le cylindre est haut plus il est mince).

La valeur $x = \frac{2a}{3}$ est donc la seule qui puisse répondre à la question; et dans cette hypothèse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $-\frac{2\pi b^2}{a}$, nombre négatif. Si l'on retranche donc $SD = x = \frac{2}{3} SC$ de la hauteur du cylindre, il restera $CD = \frac{1}{3} SC$. Il résulte de ce qui précède, que le cylindre le plus volumineux inscrit au cône, a pour hauteur le tiers de celle du cône.

PROBLÈME III.

102. Partager une droite AB (fig. 15) en deux parties AC et CB, de manière que le produit $AC^3 \times CB$ soit un maximum.

Représentons par a cette droite AB, et par x la partie CB de cette droite, l'équation du problème sera donc

$$y = x^3(a - x),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - 4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6ax - 12x^2;$$

en égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on trouve $x = 0$, ou $x = \frac{3a}{4}$.

Cette seconde valeur est la seule qui puisse résoudre le problème, puisqu'elle réduit celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à $-\frac{9a^2}{4}$, résultat négatif.

103. Observons que lorsque dans la valeur du coefficient

différentiel $\frac{dy}{dx}$ il y a un facteur constant positif, on peut le supprimer. En effet, si nous avons

$$\frac{dy}{dx} = A\phi x,$$

on en tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A \frac{d.\phi x}{dx}.$$

Cette seconde équation ne servant qu'à nous faire connaître le signe de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ce signe ne dépend que de celui qui affectera $\frac{d.\phi x}{dx}$, parce que A est un facteur constant positif : donc A peut être supprimé dans cette équation. Il peut l'être aussi dans l'équation $\frac{dy}{dx} = A\phi x$; car puisque nous devons évaluer à zéro le second membre de cette équation pour déterminer x , l'équation $A\phi x = 0$ nous donnera $\phi x = 0$; d'où il suit qu'on a droit d'omettre la constante.

PROBLÈME IV.

104. *On veut faire entrer dans un vase cylindrique une certaine quantité d'eau dont le volume est connu ; on demande quelles dimensions il faut donner à ce vase pour que sa surface interne soit aussi petite qu'il est possible.*

Soit V le volume d'eau donné, et x le rayon de la base du cylindre ; πx^2 sera l'aire de la base du cylindre. Et puisque la hauteur de ce cylindre, multipliée par sa base, est égale à son volume, on aura

$$\text{hauteur du cylindre} \times \pi x^2 = V,$$

d'où l'on tirera

$$\text{hauteur du cylindre} = \frac{V}{\pi x^2};$$

en multipliant cette hauteur par la circonférence de la base qui est $2\pi x$, on aura

$$\frac{V}{\pi x^2} \times 2\pi x = \frac{2V}{x}$$

pour la surface convexe du cylindre. Si à cette surface on ajoute πx^2 , qui est celle de la base du cylindre, l'équation à différencier sera

$$y = \frac{2V}{x} + \pi x^2,$$

et l'on en déduira

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4V}{x^3} + 2\pi.$$

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ étant égale à zéro donne

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

On voit que cette valeur répond à un minimum, puisqu'elle rend positive celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$: le rayon de la base du cylindre

cherché sera donc $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Si l'on met cette valeur dans l'expression de la hauteur, on trouvera, pour la hauteur du cylindre,

$$\frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Ce problème est applicable à l'Artillerie; car une charge de poudre étant donnée, on peut se proposer de trouver quelles dimensions devrait avoir un mortier à chambre cylindrique, pour que la poudre exerçât le plus petit effort contre les parois de la chambre.

On voit que cette question se réduit à trouver quelle est la plus petite

surface qu'on puisse donner à la chambre du mortier; et il s'agit de ce qui précède, que le rayon de la chambre doit être égal à sa hauteur.

PROBLÈME V.

105. *Entre tous les cônes inscrits dans une sphère, dé-* Fig. 16.
terminer celui qui a une plus grande surface convexe.

Supposons que le demi-cercle AMB , fig. 16, fasse une révolution autour de l'axe AB , la corde AM engendrera un cône dont AP sera la hauteur, et PM le rayon de la base.

La surface convexe de ce cône aura pour expression, *cir-*
conférence $PM \times \frac{1}{2} AM = 2\pi PM \cdot \frac{1}{2} AM = \pi PM \cdot AM$.

Il ne s'agit donc que de déterminer PM et AM .

Pour cet effet, soient $AB = 2a$, $AP = x$; MP étant moyenne proportionnelle entre AP et PB , on a

$$x : PM :: PM : 2a - x;$$

donc

$$PM = \sqrt{2ax - x^2};$$

AM étant moyenne proportionnelle entre AP et AB , on a

$$x : AM :: AM : 2a;$$

donc

$$AM = \sqrt{2ax};$$

substituant ces valeurs dans l'expression de la surface du cône, on obtiendra,

$$\begin{aligned} \text{surface convexe du cône} &= \pi \sqrt{2ax - x^2} \sqrt{2ax} \\ &= \pi \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}; \end{aligned}$$

l'équation à différencier est donc (art. 103)

$$y = \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x - 3ax^2}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}}$$

ou, en supprimant le facteur commun x ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2 - 3ax}{\sqrt{4a^2 - 2ax}} \dots (50);$$

égalant à zéro cette valeur de dx , nous obtiendrons

$$4a^2 - 3ax = 0,$$

équation satisfaite en supposant

$$x = \frac{4a}{3}.$$

Cette valeur appartient à un minimum; c'est ce qui va nous être confirmé par le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

106. Avant que de déterminer la valeur de ce coefficient différentiel, je vais expliquer un procédé qui abrégera les calculs dans de certains cas.

J'observerai préliminairement que, lorsqu'une fonction de x est nulle par une valeur qu'on donne à x , il ne s'ensuit pas qu'en général son coefficient différentiel soit aussi nul : par exemple, si l'on a la fonction $x^2 - 5x + 6$, qui devient nulle lorsque $x = 2$, ou lorsque $x = 3$, le coefficient différentiel de cette fonction, qui est $2x - 5$, ne devient pas nul dans ces hypothèses.

107. On peut quelquefois abréger beaucoup les opérations qu'on emploie pour reconnaître si une fonction est susceptible d'un maximum ou d'un minimum. En effet, supposons que l'on veuille déterminer le coefficient différentiel de l'équation $\frac{dy}{dx} = XX'$, dans laquelle X et X' sont des fonctions de x , dont la première seule devient nulle par une valeur donnée à x ; en différenciant cette équation, art. 14, et en divisant par dx nous obtiendrons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{XdX'}{dx} + \frac{X'dX}{dx};$$

X, par hypothèse, étant nul, en vertu de la valeur donnée à x , cette équation se réduit à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{X'dX}{dx},$$

ce qui nous indique que, pour obtenir $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut multiplier le coefficient différentiel du facteur nul par l'autre facteur (*).

108. Par exemple, si l'on veut obtenir le coefficient différentiel du second ordre de $y = \frac{x-a}{\sqrt{x}}$ dans l'hypothèse de $x = a$; en écrivant ainsi cette équation,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times (x-a),$$

on trouvera que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{d(x-a)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

109. Reprenons maintenant l'équation (50), de laquelle on veut tirer la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans l'hypothèse de $x = \frac{4a}{3}$: en décomposant le numérateur en ses facteurs, nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax(4a-3x)}{\sqrt{4a^3x^3-2ax^3}};$$

(*) Cette règle n'est pas sans exception, car $\frac{dX}{dx}$ peut être nul aussi. Par exemple, si l'on avait $\frac{dy}{dx} = x^2(x-a)^2$, équation qui renferme des racines égales, les deux termes de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ seraient nuls; et, au lieu de supprimer le facteur représenté par $X \cdot \frac{dX}{dx}$, on devrait, art. 96, recourir aux coefficients différentiels des ordres supérieurs, pour reconnaître si la fonction est susceptible d'un maximum ou d'un minimum; si $\frac{dX}{dx}$ était infini, on tomberait dans le cas de l'art. 87.

le second membre peut s'écrire ainsi :

$$\frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times (4a - 3x);$$

dans l'hypothèse actuelle, le facteur $4a - 3x$ étant nul, nous aurons donc, art. 107,

$$\frac{dy}{dx^2} = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times \frac{d(4a - 3x)}{dx} = -\frac{3ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}}$$

et par conséquent, en divisant les deux termes de la fraction par x ,

$$\frac{dy}{dx^2} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2 - 2ax}};$$

mettant dans cette expression la valeur de x , qui est $\frac{4a}{3}$, on obtiendra

$$\frac{dy}{dx^2} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}}} = -\frac{3a}{\sqrt{\frac{4a^2}{3}}}.$$

Cette valeur étant négative, celle de x correspond à un maximum.

PROBLÈME VI.

Fig. 17. 110. Un point C (fig. 17) étant donné dans l'angle YAX, mener par ce point une droite DE, qui rencontre les axes AX, AY, de telle manière que la longueur DE, de cette droite, soit un minimum.

Soient $AI = a$, $IC = b$, $IE = x$; les triangles rectangles ICE, ADE, nous donnent

$$IE : IC :: AE : AD,$$

ou

$$x : b :: a + x : AD;$$

donc

$$AD = \frac{b}{x} (a + x);$$

par conséquent

$$AD^2 = \frac{b^2}{x^2} (a+x)^2.$$

D'une autre part,

$$AE^2 = (a+x)^2;$$

substituant ces valeurs dans la formule

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2},$$

nous trouverons

$$DE = \sqrt{\frac{b^2}{x^2} (a+x)^2 + (a+x)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{x^2} + 1\right) (a+x)^2};$$

et, en réduisant au même dénominateur le premier facteur qui est sous le radical,

$$DE = \sqrt{\frac{b^2 + x^2}{x^2} (a+x)^2} = \frac{a+x}{x} \sqrt{b^2 + x^2} = y.$$

En regardant cette expression comme le produit du facteur $\frac{a+x}{x}$, par le facteur $\sqrt{b^2 + x^2}$, nous différencierons par

l'art. 14, et nous trouverons

$$dy = \frac{a+x}{x} d. \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2} d. \frac{a+x}{x};$$

effectuant les différenciations, nous aurons

$$dy = \frac{(a+x)}{x} \frac{x dx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \sqrt{b^2 + x^2} \times - \frac{a dx}{x^2};$$

réduisant au même dénominateur, en multipliant les deux termes de la première fraction par x , et les deux termes de la seconde par $\sqrt{b^2 + x^2}$, nous obtiendrons

$$dy = \frac{(a+x)}{x^2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{b^2 + x^2}} + \frac{b^2 + x^2}{x^2 \sqrt{b^2 + x^2}} \times - a dx;$$

réunissant et réduisant les termes du numérateur, et divisant par dx , il nous viendra enfin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - ab^2}{x^2 \sqrt{b^2 + x^2}};$$

égalant le numérateur à zéro, nous trouverons

$$x = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Pour prouver que cette valeur répond à un minimum dans cette hypothèse, nous mettrons seulement, art. 107, à la place du numérateur, qui est le facteur nul, son coefficient différentiel, et nous aurons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2}{x^2 \sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{3}{\sqrt{b^2 + x^2}};$$

valeur essentiellement positive. On ne fait pas la substitution de la valeur de x , car on voit qu'un carré x^2 est toujours positif.

PROBLÈME VII.

111. *Trouver le plus grand triangle rectangle qu'on puisse construire sur une droite donnée.*

Fig. 18. Soient a cette droite, AB , fig. 18, x l'un des côtés du triangle, l'autre sera $\sqrt{a^2 - x^2}$; donc la surface du triangle a pour expression

$$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2};$$

ainsi l'équation du problème sera, art. 103,

$$y = x \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ ou plutôt } y = \sqrt{a^2 x^2 - x^4},$$

d'où l'on déduira

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 x - 2x^3}{\sqrt{a^2 x^2 - x^4}};$$

Cette valeur étant égalée à zéro, donne

$$a^2 x - 2x^3 = 0, \text{ ou } x(a^2 - 2x^2) = 0;$$

équation de laquelle on tire

$$x = 0, \text{ ou } 2x^2 = a^2.$$

x ne pouvant être nul, nous le déterminerons par la seconde équation; elle nous apprend que les deux côtés AC, BC sont égaux.

En différenciant le facteur $a^2 - 2x^2$, on trouve, art. 107,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}} \times \frac{d(a^2 - 2x^2)}{dx} = - \frac{4x^2}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}.$$

Ce résultat étant négatif, l'hypothèse de $a^2 - 2x^2 = 0$ détermine, pour x , une valeur qui correspond à un maximum.

De la signification géométrique des coefficients différentiels,

112. On a vu, art. 71, que $\frac{dy}{dx}$ représentait la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, une tangente menée au point dont les coordonnées sont x et y ; comme c'est le fondement de ce qui va suivre, on peut démontrer *a priori* cette proposition de la manière suivante; soient, fig. 4, $PM = y$, $PP' = h$; en menant la parallèle Fig. 4 MQ à l'axe des abscisses, on a donc

$$M'P' = f(x + h),$$

$$M'Q = f(x + h) - f(x) = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Or

$$MQ : M'Q :: 1 : \text{tang } S = \frac{M'Q}{MQ};$$

et en mettant pour les expressions $M'Q$, MQ , leurs valeurs, on aura

$$\text{tang } S = \frac{\frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h}{1.2} + \text{etc.}$$

Passant à la limite, h est nul, et tangente S se change en tangente T .

Donc alors

$$\text{tang } T = \frac{dy}{dx}.$$

Cela posé, si PM devient un maximum, la tangente TM ,
 Fig. 19. fig. 19, étant alors parallèle à l'axe des abscisses, elle fait un angle nul avec cet axe; et comme on vient de voir que la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente avec l'axe des x était représentée par $\frac{dy}{dx}$, on a donc, dans ce cas,

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

On démontrerait de même que si PM était un minimum, la tangente trigonométrique devenant aussi nulle dans ce cas, on devrait avoir $\frac{dy}{dx} = 0$.

Ainsi, cette équation $\frac{dy}{dx} = 0$ n'exprime autre chose que la condition du parallélisme de la tangente en M à l'axe des abscisses.

113. Examinons maintenant dans quelle circonstance $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif ou négatif.

Pour cet effet, considérons d'abord le cas où la courbe,
 Fig. 20. fig. 20, tourne sa convexité vers l'axe des abscisses.

Soient AP , x ; PM , y ; $PP' = P'P'' = h$; et par les points M et M' , menons la sécante $MM'S$, et les droites MN , $M'N'$, parallèles à l'axe des abscisses, nous aurons.

$$M'O = M'P' - MP = f(x+h) - f(x),$$

c'est-à-dire

$$M'O = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Or, la similitude des triangles $MM'O$, MSN , nous donne

$$MO : MN :: M'O : SN,$$

ou

$$h : 2h :: M'O : SN;$$

donc,

$$SN = 2M'O;$$

et, en substituant pour $M'O$ sa valeur, on a

$$SN = 2 \frac{dy}{dx} h + 2 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

D'une autre part,

$$M''P'' = f(x + 2h);$$

si on en retranche

$$NP'' = PM,$$

on aura

$$M''N = f(x + 2h) - y = \frac{dy}{dx} 2h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{4h^2}{1.2} + \text{etc};$$

étant de cette valeur de $M''N$, celle de SN , il restera,
fig. 20,

Fig. 20.

$$M''S = \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc....} (51).$$

Dans le cas où la courbe, fig. 21, tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, pour avoir $M''S$ il faudra, au contraire, retrancher de la valeur de SN celle de $M''N$, ce qui donnera

$$M''S = - \frac{d^2y}{dx^2} h^2 + \text{etc....} (52).$$

En comparant ces deux valeurs (51) et (52) de $M''S$, on voit que, dans l'une, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est précédé du signe $+$, et dans l'autre, du signe $-$.

Cela posé, on peut faire en sorte que le signe du premier terme du développement de $M''S$ décide de celui de tout ce

développement; et comme le carré h^2 , qui est essentiellement positif, ne peut influencer sur le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}h^2$, le coefficient différentiel $\frac{d^2y}{dx^2}$ décidera seul du signe de la somme de tous les termes de la valeur de $M''S$.

En ne considérant donc les équations (51) et (52) que relativement aux signes qui affectent chaque membre, on pourra supprimer h^2 et les termes qui suivent $\frac{d^2y}{dx^2}$, et ces équations deviendront

$$M''S = + \frac{d^2y}{dx^2}, \quad M''S = - \frac{d^2y}{dx^2}.$$

d'où nous tirerons

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= + M''S \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= - M''S \end{aligned} \right\} \dots (53).$$

Fig. 20. Si l'on regarde y comme une quantité positive, $M''S$ (fig. 20), tombant du même côté que y , sera positif; la première des équations (53) nous apprend donc que, lorsque la courbe tourne (fig. 20) sa convexité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif.

Si l'on considère ensuite la seconde des équations (53) et la fig. 21 qui s'y rapporte, on verra que $-M''S$ représente une droite qui est d'un signe contraire à celui de y , et que, par

Fig. 21. conséquent, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif dans le cas de la fig. 21, c'est-à-dire lorsque la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses.

114. La courbe jusqu'à présent a été supposée située au-dessus de l'axe des abscisses; examinons ce qu'il arrive lorsqu'elle s'étend au-dessous, comme dans la fig. 67. Il est

Fig. 67.

certain, par ce qui précède, que puisque la courbe tourne en M sa convexité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$, et par conséquent MN, est positif. Or, les droites MN et M'N', qui sont situées du même côté de la tangente T'T, doivent avoir le même signe; et comme MN est positif, M'N' doit l'être aussi; d'où il suit qu'au point M', où la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera d'un signe contraire à celui de l'ordonnée P'M', qui est négative; la courbe tournerait, au contraire, sa convexité, si y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ étaient de même signe. De sorte qu'on peut dire, en général, que de quelque côté que tombe la courbe, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est du même signe que y lorsque la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses, et prend un signe contraire lorsque la courbe tourne sa concavité vers le même axe.

La courbe tournant sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses, suivant que l'ordonnée est parvenue à son minimum ou à son maximum, on voit pourquoi $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif dans le premier cas, et négatif dans le second.

115. On dit encore qu'il peut y avoir un maximum ou un minimum lorsque $\frac{dy}{dx} = \infty$. Pour expliquer ce que cette condition signifie, soit $y = fx$ l'équation d'une courbe MN, fig. 22; il est certain que si l'on donne à x une valeur AP, cette équation déterminera l'ordonnée PM.

Si l'on résout ensuite l'équation par rapport à y, et qu'on en tire $x = \phi y$; lorsqu'on fera $y = AP'$ (valeur précédente de y), l'équation donnera $x = P'M$. Dans ce dernier cas, y sera considéré comme l'abscisse, et x comme l'ordonnée, et l'on construira la même courbe, pourvu qu'on porte les

abscisses y sur l'axe AY , et que l'autre axe soit regardé comme celui des ordonnées.

Dans cette hypothèse, on peut donc chercher le maximum ou le minimum de la fonction x de y . Pour cet effet, de l'équation proposée on tirera $\frac{dx}{dy} = M$, et l'on supposera

$M = 0$; cela posé, l'équation $\frac{dx}{dy} = M$ nous donnant

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{M}$, on voit que lorsque $M = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$; ainsi, la condition nécessaire pour qu'il y ait un maximum ou un minimum dans le sens des abscisses, est qu'on puisse avoir $\frac{dy}{dx} = \infty$.

116. Par exemple, si l'on prenait l'équation

$$y^2 = ax - b,$$

on en tirerait $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$. Cette valeur égalée à zéro donnerait $y = \infty$; donc la courbe ne peut avoir un maximum dans le sens des ordonnées qu'à une distance infinie de l'axe des x . Examinons maintenant si elle a une limite dans le sens des abscisses (par limite on dénomme, en général, le maximum et le minimum); pour cela, il faut supposer infinie la valeur de $\frac{dy}{dx}$, ce qui nous donne $\frac{a}{2y} = \infty$, condition remplie lorsqu'on fait $y = 0$; dans cette hypothèse, la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ se réduit à $\frac{2}{a}$, résultat positif. On voit donc que la valeur de $y = 0$ correspond à un minimum de x . Nous déterminerons ce minimum en faisant $y = 0$ dans l'équation proposée, ce qui la réduira à $ax - b = 0$, d'où nous tirerons $x = \frac{b}{a}$ pour le minimum cherché : ce minimum est re-

Fig. 23. présenté par AM dans la fig. 25.

117. En terminant cette matière, nous remarquerons que l'équation $\frac{dy}{dx} = \infty$ nous indique que la tangente MT , fig. 23, est celle d'un angle droit, et, par conséquent, est perpendiculaire à l'axe des x .

Considérations générales sur les points singuliers des courbes.

118. Le calcul différentiel peut être d'une grande utilité pour trouver la forme d'une courbe dont l'équation est donnée. La théorie des maxima et minima nous offre déjà les moyens de déterminer les limites dans le sens des abscisses et dans celui des ordonnées ; mais cela ne suffirait pas pour nous faire reconnaître la forme de la courbe. Par exemple, les courbes des figures 68, 69 et 70, qui ont les mêmes limites OG et OD, dans le sens des ordonnées, et OA et OB dans celui des abscisses, ne se ressemblent pas. Ce qui distingue la courbe fig. 68 de la courbe fig. 69, c'est que, dans Fig. 69, cette dernière, il n'y a qu'un point d'inflexion ; on appelle ainsi un point où la courbe de concave devient convexe, ou de convexe devient concave. Dans la fig. 68 il y a deux points d'inflexion l'un en E, l'autre en G, et un point de rebroussement en C, c'est-à-dire un point où la courbe suspend tout d'un coup son cours.

119. En général, les points où la courbe éprouve des changemens, s'appellent des *points singuliers* ; on sent que si l'on a les moyens de reconnaître les endroits où ces points existent, il sera facile de suivre la courbe dans son cours. Par exemple, si l'on savait que la courbe fig. 70 a des points d'inflexion en E et en H, et des points de rebroussement en F et en G, on pourrait prendre une idée de cette courbe par l'analyse suivante :

En partant du point A, qui est une limite dans le sens

des abscisses, la courbe tourne d'abord sa concavité vers l'axe des abscisses jusqu'en E, où il existe un point d'inflexion qui, de concave, la fait devenir convexe. A l'extrémité de la partie convexe EF, elle suspend son cours au point de rebroussement F, au-delà duquel elle est encore convexe dans la partie FH, pour redevenir concave au-delà du point d'inflexion H et arriver ainsi jusqu'au point C, qui est une limite dans le sens des ordonnées; enfin de C en G et de A en G, la courbe est composée de deux arcs CBG, ADG, qui, tournant leurs concavités à l'axe des abscisses, se réunissent en un point de rebroussement, et passent par les deux limites B et D, l'une dans le sens des abscisses et l'autre dans celui des ordonnées.

120. D'après ce qui précède, on sent combien il serait avantageux de pouvoir, à l'aide de l'équation d'une courbe, déterminer les coordonnées des points singuliers; nous avons déjà fait connaître les moyens de trouver les maxima et les minima; il nous reste à nous occuper de la recherche des autres points singuliers: c'est ce qui va faire le sujet des paragraphes suivans.

Des points d'inflexion.

Fig. 71.

121. Nous venons de voir qu'un point d'inflexion est celui dans lequel la courbe, de convexe devient concave ou de concave devient convexe. La courbe $M'MM''$, fig. 71, nous offre en M un point de ce genre. Menons en ce point une tangente TT' ; si nous considérons les diverses ordonnées comprises entre $M'P'$ et MP , nous verrons que le prolongement $M'N'$ de l'ordonnée jusqu'à la courbe, ira en diminuant, et s'anéantira au point M; si nous considérons les ordonnées suivantes, le prolongement $M''N''$ de l'ordonnée tombera au-dessous de la tangente, et par conséquent changera de signe, de sorte que si $M'N'$ était positif, $M''N''$ sera

négalif. Telle est la condition que nous allons exprimer par une équation.

Soient donc, fig. 71, $PP' = h = PP''$; on a évidemment Fig. 71.

$$M'N' = M'P' - N'P',$$

ou

$$M'N' = f(x + h) - N'P' \dots (54).$$

Pour déterminer la valeur analytique de $N'P'$ nous avons

$$N'P' = MP + N'O,$$

ou

$$N'P' = y + N'O \dots (55).$$

A l'égard de celle de $N'O$, le triangle rectangle $N'MO$ nous donne

$$N'O = MO \tan g N'MO;$$

or on a vu, art. 71, que l'angle $N'MO$, formé par la tangente en M , avec une parallèle à l'axe des x , avait $\frac{dy}{dx}$ pour tangente trigonométrique; par conséquent remplaçant $\tan g N'MO$ par $\frac{dy}{dx}$, et mettant h à la place de MO , nous aurons

$$N'O = h \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (55), et mettant ensuite celle de $N'P'$ dans l'équation (54), nous obtenons

$$M'N' = f(x + h) - y - \frac{dy}{dx} h \dots (56).$$

Sans avoir besoin de calculer de nouveau la valeur $M''N''$, on peut la déduire de celle de $M'N'$; en effet, si nous faisons reculer l'ordonnée parallèlement à elle-même, $M'N'$ deviendra $M''N''$, lorsque h se changera en $-h$; donnant donc

à h cette valeur dans l'équation (56), nous obtiendrons

$$M''N'' = f(x-h) - y + \frac{dy}{dx} h \dots (57).$$

Maintenant, remplaçons les expressions $f(x+h)$ et $f(x-h)$ par leurs développemens, nous aurons

$$M'N' = \left(y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \right) - y - \frac{dy}{dx} h,$$

$$M''N'' = \left(y - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \right) - y + \frac{dy}{dx} h;$$

et en réduisant, ces équations deviendront

$$M'N' = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (58),$$

$$M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (59).$$

Cela posé, pour qu'il y ait inflexion en M , il faut nécessairement que, lorsqu'on donnera à h une valeur très petite, les lignes $M'N'$ et $M''N''$ tombent l'une au-dessus et l'autre au-dessous de la droite TT' , ce qui exige que $M'N'$ et $M''N''$ soient de signes contraires; or, cela n'est possible que lorsque le premier terme $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$, des séries (58) et (59), est nul. En

effet, si ce terme n'était pas nul, on pourrait donner à h une valeur assez petite pour que le terme $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ surpassât

la somme algébrique de tous les autres termes de la série; dans ce cas, le signe de ce terme serait celui du résultat de toute la suite; et comme ce terme est le même dans les

Fig. 71. deux séries, il en résulterait que $M'N'$ et $M''N''$ (fig. 71) auraient nécessairement le même signe; par conséquent, pour que $M'N'$ et $M''N''$ puissent être de signes contraires,

il faut que l'on ait

$$\frac{d^2y}{dx^2} h^2 = 0, \text{ ou plutôt } \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

122. S'il arrivait que la même valeur de x , qui fait évanouir $\frac{d^2y}{dx^2}$, fit aussi évanouir $\frac{d^3y}{dx^3}$, il faudrait pour qu'il pût y avoir un point d'inflexion, que $\frac{d^4y}{dx^4}$ fût aussi nul. Dans ce cas, si $\frac{d^5y}{dx^5}$ était aussi nul, il faudrait encore que $\frac{d^6y}{dx^6}$ fût nul, et ainsi de suite; de sorte que le dernier coefficient différentiel qui serait nul, devrait être d'ordre pair.

123. Si la valeur x qui est la même dans les développemens 58 et 59, était telle que $\frac{d^2y}{dx^2}$ fût infini, ces deux développemens le seraient aussi; et alors on ne pourrait rien conclure de la démonstration précédente qui repose sur la possibilité de ces développemens; dans ce cas, il faut remarquer que la condition $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, nous indique, en général, que $\frac{dy^2}{dx^2}$ doit changer de signe au point d'inflexion, ce qui s'accorde avec l'art. 113; mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut aussi changer de signe en passant par l'infini. Pour en donner un exemple, soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2}{x-a}.$$

Si l'on substitue successivement à x les valeurs

$$x = a - h, \text{ on trouvera } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{h},$$

$$x = a, \frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

$$x = a + h, \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{b^2}{h}.$$

6.

et l'on voit que c'est le dénominateur de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui fait changer de signe au coefficient différentiel après le point d'inflexion.

124. Il résulte de ce qui précède, que pour qu'il puisse y avoir un point d'inflexion dans une courbe, il faut qu'on ait, pour l'abscisse de ce point,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

Lorsqu'on se sera assuré que l'une de ces conditions est remplie, on augmentera et l'on diminuera successivement d'une quantité très petite h , l'abscisse du point qui remplit la condition prescrite; et si $\frac{d^2y}{dx^2}$, pour ces nouvelles valeurs de x , est affecté de signes contraires, il faudra en conclure qu'il y a un point d'inflexion; car, lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif, la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses, tandis que lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, la courbe tourne sa concavité vers le même axe; or, c'est par ce changement de convexe en concave, ou de concave en convexe, que la courbe manifeste son point d'inflexion.

125. Pour donner une application de cette théorie, cherchons s'il y a un point d'inflexion dans la courbe qui a pour équation

$$y = b + 2(x - a)^3 \dots (60).$$

La différenciation nous donne

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2 \cdot (x - a)^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12(x - a), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 12.$$

Pour qu'il puisse y avoir un point d'inflexion, il faut donc

qu'il existe une valeur de x , qui rende nul le terme $\frac{d^2y}{dx^2}$;

or, x étant une quantité variable, déterminons l'une de ses valeurs par la condition, qu'on ait $12(x-a)=0$, et nous obtiendrons $x=a$ pour l'abscisse, qui peut appartenir à un point d'inflexion. Pour nous assurer de l'existence de ce point, diminuons l'abscisse a d'une petite quantité h , et substituons $a-h$ à x , nous trouverons que, pour le point M' (fig. 72), dont l'ab- Fig. 72.
scisse est $a-h$, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = -12h$; substituons ensuite $a+h$ à x , et nous trouverons que le point M'' , dont l'abscisse est $a+h$, correspond à $\frac{d^2y}{dx^2} = 12h$. Ces deux valeurs de différens signes de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous montrent qu'il y a un point d'inflexion en M .

L'hypothèse de $x=a$ fait évanouir $\frac{dy}{dx}$, par conséquent la tangente au point d'inflexion est parallèle à l'axe des x .

126. Il est à remarquer qu'on n'a pas toujours la faculté d'égaliser ainsi à zéro la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$; si l'on voulait, par exemple, chercher s'il existe des points d'inflexion dans la courbe qui a pour équation,

$$y = b + ax^3,$$

on trouverait, par la différenciation,

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6a.$$

Or, on voit qu'on ne peut égaliser à zéro la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui ne renferme aucune indéterminée, et que par conséquent la courbe ne peut avoir un point d'inflexion, résultat auquel on devait s'attendre, puisque la courbe est une parabole. La

la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous montre seulement que cette parabole tourne continuellement sa convexité vers l'axe des abscisses.

127. Pour troisième application, prenons l'équation

$$y^3 = x^5;$$

en la résolvant par rapport à y , et en différenciant ensuite, on obtient

$$y = x^{\frac{5}{3}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Si l'on cherchait à déterminer x par l'équation.....

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \text{ ou plutôt } \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \text{ on ne pourrait satisfaire}$$

à cette équation qu'en faisant $x = \infty$, ce qui ne conduirait à rien; mais comme nous avons la faculté d'égaliser

aussi la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ à l'infini, nous satisferons à l'équa-

tion $\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, en faisant $x = 0$; cette valeur de x nous

apprend qu'il peut y avoir un point d'inflexion à l'origine;

et, pour nous assurer de l'existence de ce point, nous substituerons successivement à x les valeurs $x = 0 + h$ et $x = 0 - h$, c'est-à-dire h et $-h$, et nous verrons si, dans ces deux cas, $\frac{d^2y}{dx^2}$ amène des résultats de signes contraires.

Mais au lieu de faire ces opérations l'une après l'autre, nous pourrions les exécuter à la fois, en substituant à x la valeur $\pm h$, et alors le coefficient différentiel du second ordre deviendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

La valeur supérieure se rapporte à une abscisse plus grande que celle du point d'inflexion, et la valeur inférieure se rapporte à une abscisse moindre. Comme ces deux valeurs sont de signes contraires, nous pouvons en conclure que $x = 0$ correspond à un point d'inflexion A (fig. 73).

Fig. 73.

128. Pour dernière application, prenons la courbe qui a pour équation,

$$(y - b)^2 = x^3.$$

Cette équation nous donne

$$y = b \pm x^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{x}};$$

en faisant $x = 0$, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, ce qui est un indice qu'il peut se rencontrer un point d'inflexion à l'origine. Pour savoir si ce point existe, faisons d'abord $x = h$, et substituons cette valeur dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Si l'on fait ensuite $x = -h$, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient imaginaire, ainsi que la valeur de y , ce qui nous apprend que la courbe n'existe pas pour des abscisses négatives; ainsi, quoique $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit infini à l'origine, il n'y a pas de point d'inflexion. Bientôt il nous sera facile de reconnaître que l'origine A (fig. 74) appartient à une classe de points que l'on a compris sous le nom de *points de rebroussement*; c'est ce que nous allons examiner plus particulièrement dans le paragraphe suivant.

Fig. 74.

Des points de rebroussement.

129. Lorsqu'une courbe s'arrête dans son cours, et re-

vient sur ses pas, on a un point de rebroussement; le rebroussement est de la première espèce lorsque les deux branches

Fig. 74. se tournent leurs convexités, comme dans la fig. 74, et le rebroussement est de la seconde espèce, lorsque les concavités sont concentriques, comme dans la fig. 75.

130. La courbe s'arrête ainsi, parce qu'au-delà du point C de rebroussement, les valeurs que l'on donne à l'abscisse en déterminant d'imaginaires pour l'ordonnée, ce qui suppose que $\frac{d^2y}{dx^2}$ renferme un radical; et si, avant que la

courbe suspende son cours, $\frac{d^2y}{dx^2}$ donne deux valeurs, l'une du signe de y et l'autre d'un signe contraire, cela annonce

Fig. 74. qu'il y a deux branches de courbe réunies au point C (fig. 74), l'une convexe vers l'axe des abscisses, et l'autre concave. A ces caractères on peut reconnaître un point de rebroussement de la première espèce; si, au contraire, les deux

valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont de même signe, les deux branches qui

Fig. 75. se réunissent en C (fig. 75), ne peuvent être que concentriques: par conséquent le rebroussement sera, dans ce cas, de la seconde espèce.

131. Pour premier exemple, examinons s'il y a des points de rebroussement dans la courbe qui a pour équation

$$(y-x)^2 = x^3.$$

Cette équation donne

$$y = x \pm x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} \dots (61).$$

On voit que lorsqu'on prend x négatif, y devient imaginaire; donc la courbe s'arrête à l'origine, ou $x=0$ et $y=0$; mais cela ne prouve pas encore qu'il y ait à l'origine un point de rebroussement, car il pourrait n'exister en ce point qu'un arc de courbe, toujours concave du même côté, ainsi que cela a lieu au sommet de l'hyperbole; ainsi, pour

reconnaître si la valeur de $x=0$ correspond à un point de rebroussement, il faut savoir ce que devient, près de l'origine, le coefficient différentiel du second ordre; or, en différenciant et en divisant par dx l'équation

$$y = x \pm x^{\frac{3}{2}},$$

on trouve

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \dots (62);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{x}.$$

Pour savoir si la courbe est concave ou convexe, près du point où elle suspend son cours, on augmentera l'abscisse de ce point d'une petite quantité h , en faisant $x=0+h$, c'est-à-dire h , et en substituant cette valeur dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$; on trouvera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} h^{\frac{1}{2}} \sqrt{h}.$$

Ces deux valeurs de signes contraires indiquent donc deux branches; l'une, AM (fig. 76), qui tourne sa convexité vers Fig. 76; l'arc des abscisses, et l'autre, AN, qui tourne sa concavité vers le même axe, par conséquent l'origine est un point de rebroussement de la première espèce.

132. Pour second exemple, prenons l'équation

$$(y-b)^2 = (x-a)^3;$$

cette équation nous donne

$$y = b \pm \sqrt{(x-a)^3} \dots (63).$$

Si l'on fait $x=a$, on trouve $y=b$; mais si l'on donne à x des valeurs moindres que a , celles de y deviennent imaginaires; car en mettant $a-h$ à la place de x , on trouve

$$y = b \pm \sqrt{-h^3} = b \pm h \sqrt{-h},$$

Fig. 74. valeur imaginaire; la courbe suspend donc son cours au point C (fig. 74), dont les coordonnées sont a et b .

Pour connaître de quelle manière s'étendent ses branches au-delà du point C, substituons à x la valeur $a + h$, dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$; nous obtiendrons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{h}}.$$

Le signe supérieur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous indique une branche CM, qui tourne sa convexité vers l'axe des x , et le signe inférieur nous indique une branche CN, qui tourne sa concavité vers le même axe: donc il y a au point C un point de rebroussement de la première espèce.

133. Pour troisième exemple, prenons la courbe dont l'équation est

$$y = ax^3 \pm bx^3 \sqrt{x}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = 0$; mais pour x négatif y est imaginaire; donc la courbe suspend son cours à l'origine; examinons ce que devient alors $\frac{d^2y}{dx^2}$. Pour cet effet, en écrivant l'équation de la courbe de la manière suivante,

$$y = ax^3 \pm bx^{\frac{5}{2}},$$

nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = 2ax \pm \frac{5}{2} bx^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} b \sqrt{x};$$

donnant à x une valeur positive très petite, représentée par h , la partie $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot b \sqrt{h}$ de la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera moindre que la partie $2a$, par conséquent les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

données par l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{1} b \sqrt{h},$$

seront positives; d'où il suit qu'à l'origine, il y aura deux branches qui tourneront leurs concavités vers l'axe des x . Il existe donc, à l'origine, un point de rebroussement de la seconde espèce.

134. Les points de rebroussement appartiennent à une classe de points compris sous la dénomination de *points multiples*.

Des points multiples.

135. On appelle *points multiples* les points où plusieurs branches de courbe se réunissent. Un point multiple est double lorsqu'il est à l'intersection de deux branches, il est triple lorsqu'il est à l'intersection de trois branches; ainsi de suite.

136. Soit A (fig. 77) un point double, formé par les deux branches de courbe AB, AC, auxquelles on a mené les tangentes AT et AT'. Si nous représentons par $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, délivrée de radicaux, la différentielle de cette équation, mise sous cette forme, $Pdx + Qdy = 0$, ne renfermera aucun radical, parce que la différenciation d'une fonction rationnelle n'en introduit point dans cette fonction; d'où il suit que P et Q seront des quantités rationnelles.

Cela posé, l'équation précédente nous donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \dots (64),$$

$\frac{dy}{dx}$ devant avoir deux valeurs différentes, puisqu'il y a deux tangentes, il faudra que $\frac{P}{Q}$ se détermine de manière que cette

Fig. 77.

condition soit remplie; or, elle le serait, si $\frac{P}{Q}$ renfermait un radical; mais c'est une chose impossible, puisque nous avons vu que $\frac{P}{Q}$ était rationnel; dans ce cas, il faut que l'Algèbre nous conduise à un résultat qui évite cette contradiction, et c'est ce qui a lieu lorsque $\frac{P}{Q}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, car nous savons que $\frac{0}{0}$ est le symbole d'une quantité indéterminée, et par conséquent susceptible de plusieurs valeurs.

137. Voici de quelle manière ce théorème se démontre. Supposons pour un instant que α et α' représentent les deux valeurs de la tangente trigonométrique de la courbe, au point multiple, ces valeurs devront satisfaire à l'équation

$$P + Q \frac{dy}{dx} = 0,$$

et donneront

$$P + Q\alpha = 0, \quad P + Q\alpha' = 0.$$

Ces deux dernières équations étant retranchées l'une de l'autre, on obtient

$$Q(\alpha - \alpha') = 0;$$

or, le facteur $\alpha - \alpha'$ étant composé de deux quantités inégales, ne peut être nul; d'où il suit qu'on a $Q = 0$, ce qui réduit l'équation $P + Q\alpha = 0$ à $P = 0$. Au moyen de ces valeurs de P et de Q , l'équation $P + Q \frac{dy}{dx} = 0$, ou plutôt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \text{ devient}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

138. Si au lieu de deux branches réunies en un point, nous en avons

un plus grand nombre, il suffit d'en considérer seulement deux, pour prouver qu'un point de rencontre de toutes ces branches, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$: on ne peut parvenir aussi facilement à la même conclusion, lorsque plusieurs branches de courbe n'ont qu'une tangente commune ; néanmoins, dans ce cas même, on peut encore prouver que $\frac{dy}{dx}$ doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$; mais comme la démonstration de ce théorème est fondée sur la considération des contacts des courbes, nous nous réservons de la donner art. (170), lorsque nous aurons parlé des courbes osculatrices.

139. On peut remarquer que la démonstration de l'article 137 étant fondée sur ce que l'équation primitive a été délivrée de radicaux, si l'on différencie sans les avoir préliminairement fait disparaître, il pourrait se faire qu'une équation qui comporte des points multiples, ne donnât pas $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Par exemple, l'équation de l'art. 131, page 89, est dans ce cas ; elle a un point double à l'origine, et cependant si l'on fait $x = 0$, l'équation (62) se réduit à $\frac{dy}{dx} = 1$.

140. Enfin, nous ajouterons que, quoique l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ ait lieu pour un point multiple, il ne s'ensuit pas qu'elle ne puisse subsister que pour un point de ce genre ; car la démonstration précédente ne nous dit pas que cette propriété leur soit exclusive. Ainsi, tout ce que l'on en doit conclure, c'est que la réduction de $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{0}{0}$, indique seulement qu'il peut y avoir un point multiple.

141. Ce qui précède suffit pour nous indiquer le moyen de reconnaître s'il peut exister des points multiples dans une courbe déterminée par une équation. Pour cet effet, soit U cette équation, on en déduira, pour la différenciation,

$Pdx + Qdy = 0$, et l'on verra si les mêmes valeurs de x et de y satisfont à la fois à la proposée et aux équations $P=0$, $Q=0$; si cela est, ce sera un indice que ces valeurs de x et de y peuvent appartenir à un point multiple, et alors, en discutant la courbe aux environs de ce point, on reconnaîtra s'il est multiple.

Des points conjugués.

142. Considérons une courbe qui soit telle que, dans la partie où ses coordonnées sont imaginaires, il existe seulement deux coordonnées réelles; ces coordonnées construiront un point qui sera entièrement détaché de la courbe, et auquel on a donné le nom de *point isolé* ou de *point conjugué*.

Représentons maintenant par $y = fx$ l'équation d'une courbe qui a un point conjugué. Si a et b sont les coordonnées de ce point, il faudra qu'au moins, dans ses environs, les coordonnées soient imaginaires, autrement il ne serait pas isolé; par conséquent, si nous supposons que l'abscisse a s'augmente d'une petite quantité h , l'ordonnée correspondante, représentée par $(a+h)$, devra être imaginaire; or, la série de Taylor nous donne, en général,

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Faisant $x=a$, il faudra que l'ordonnée correspondante soit b ; par conséquent nous changerons y en b ; et, appelant $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, etc., ce que deviennent les coefficients différentiels dans cette hypothèse, nous aurons

$$f(a+h) = b + \left(\frac{dy}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Or, pour que $f(a+h)$ soit une quantité imaginaire, il faut

au moins que l'une des expressions $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, etc., soit imaginaire ; c'est-à-dire que l'hypothèse de $x = a + h$ rende imaginaire l'un des coefficients différentiels ; si cette condition est remplie, la courbe pourra avoir un point conjugué.

Par exemple, si l'on a l'équation

$$y = \pm (x + b)\sqrt{x};$$

en la différenciant, on trouvera

$$\frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{b}{2\sqrt{x}} \right).$$

Cette valeur devenant imaginaire, lorsqu'on fait $x = -b$, et par conséquent $y = 0$, il est à présumer que le point A (fig. 78), dont les coordonnées sont $x = -b$ et $y = 0$, est Fig. 78, un point conjugué ; nous reconnâtrons ensuite si ce point est réellement conjugué, en augmentant et en diminuant successivement l'abscisse $-b$, d'une quantité plus petite que b , et nous trouverons que, dans les deux cas, y devient imaginaire, ce qui annonce que le point dont il est question, est un point conjugué.

143. Les points conjugués, comme les points multiples, manifestent leur existence en rendant $\frac{0}{0}$ le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

En effet, l'équation

$$Q \frac{dy}{dx} + P = 0$$

étant différenciée et divisée par dx , nous donne

$$Q \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \frac{dQ}{dx} + \frac{dP}{dx};$$

et l'on voit que le terme qui est affecté de $\frac{d^2y}{dx^2}$ a Q pour coefficient; en différenciant de nouveau, on trouvera que Q est encore le coefficient de $\frac{d^3y}{dx^3}$, et ainsi de suite; de sorte que lorsqu'on sera arrivé au coefficient de l'ordre n , nous aurons un résultat de la forme

$$Q \frac{d^n y}{dx^n} + K = 0 \dots (65).$$

Cela posé, il y a au moins l'un des coefficients différentiels qui devient imaginaire pour une valeur de x , et qui par conséquent contient un radical; représentant ce coefficient par $\frac{d^n y}{dx^n}$, il faudra donc que la fonction de x que représente cette expression, ait plus d'une valeur. Cela suffit pour que nous puissions conclure, comme dans l'article 137, que $Q = 0$, ce qui réduira l'équation $P + Q \frac{dy}{dx} = 0$, à $P = 0$; il suit de là qu'on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$.

Des courbes osculatrices.

144. Soient $y = \phi x$ et $y = Fx$, les équations de deux courbes qui se rencontrent (fig. 24) au point M, dont les coordonnées sont $AP = x'$, $PM = y'$; on aura donc, pour ce point,

$$\phi x' = Fx';$$

supposons que x' devienne ensuite $x' + h$, les équations précédentes donneront

$$M'P' = \phi(x' + h) = \phi x' + \frac{d\phi x'}{dx'} h + \frac{d^2\phi x'}{dx'^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \dots (66),$$

$$M'P' = F(x' + h) = Fx' + \frac{dFx'}{dx'} h + \frac{d^2Fx'}{dx'^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} \dots (67).$$

Si tous les termes correspondans de ces développemens sont identiquement les mêmes, les courbes se confondront; si l'on a seulement $Fx' = \phi x'$, les courbes, comme nous l'avons vu, n'auront de commun que le point M; si, outre $Fx' = \phi x'$, on a $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}$, ces courbes se rapprocheront davantage; et encore plus, si, outre ces équations, on a encore $\frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\phi x'}{dx'^2}$, et ainsi de suite; car il est évident que la différence de $M''P'$ à $M'P'$ sera d'autant moindre, qu'il y aura un plus grand nombre de termes égaux dans leurs développemens.

Cela posé, soient a, b, c , etc., les constantes de l'équation $y = Fx$; on peut, sans changer la nature de la courbe, donner des valeurs arbitraires à ces constantes. Par exemple, si l'on a l'équation $y^2 = mx + nx^2$, qui est celle d'une ellipse, quelque valeur que l'on donne aux constantes m et n , cette équation ne cesse pas d'appartenir à une ellipse, puisque l'équation conserve toujours la même forme (bien entendu qu'on ne fait varier m et n que de grandeur et non de signes, et qu'on ne les suppose pas nuls). D'après cette observation, on peut regarder comme arbitraires; les constantes a, b, c , etc., qui entrent dans les équations

$$y = Fx', \quad \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\phi x'}{dx'^2}, \text{ etc.};$$

et en prenant autant de ces équations qu'il y a de constantes, on déterminera ces constantes par la condition que ces équations soient satisfaites.

Par exemple, si l'équation $y = Fx$ ne contient que trois constantes a, b, c , on posera

$$Fx' = \phi x', \quad \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\phi x'}{dx'^2}.$$

On tirera, de ces équations, les valeurs de a , de b et de c , en fonction de x' , de y' , de $\frac{dy'}{dx'}$, etc.; on les substituera dans l'équation $y = Fx$. Alors elle jouira de cette propriété que, lorsqu'on y mettra $x' + h$ à la place de x , l'équation (67), qu'on obtiendra à l'aide de la formule de Taylor, aura les trois premiers termes de son second membre respectivement égaux aux trois premiers du second membre de l'équation (66).

Ce que nous disons d'une équation qui ne renferme que trois constantes, peut s'appliquer à une qui en contiendrait un plus grand nombre.

145. Prenons, pour exemple, le cas où l'équation $y = Fx$ représente celle d'une ligne droite; cette équation $y = Fx$ sera donc remplacée par celle-ci,

$$y = ax + b \dots (68).$$

Les équations de condition, nécessaires pour l'élimination des constantes a et b , seront

$$\phi x' = ax' + b, \quad \frac{d\phi x'}{dx'} = a \dots (69);$$

et comme $\phi x'$ représente l'ordonnée en M de la courbe dont l'équation est $y = \phi x$, et que x' correspond à y' , nous pourrions remplacer $\phi x'$ par y' , et les équations 69 se changeront en

$$y' = ax' + b, \quad \frac{dy'}{dx'} = a;$$

éliminant a , on obtiendra

$$y' = \frac{dy}{dx} x' + b.$$

Substituant la valeur de b , donnée par cette équation, et celle de a , dans l'équation (68) de la ligne droite, celle-ci

deviendra

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') \dots (70).$$

On reconnaît dans cette équation, celle d'une tangente MT (fig. 5) au point M, dont les coordonnées sont x' et y' . Fig. 5. Nous verrons bientôt pourquoi cette droite MT est tangente en M.

146. Reprenons la théorie précédente, et pour éviter les périphrases, convenons de dénommer les courbes par leurs équations. Nous avons vu, article 144, que si les courbes $y = \phi x$ et $y = Fx$ avaient seulement un point commun, en représentant par x' et y' les coordonnées de ce point, on aurait l'équation de condition $Fx' = \phi x'$; mais qu'en déterminant deux constantes de l'équation $y = Fx$, par les conditions $Fx' = \phi x'$, et $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}$, les courbes commenceraient à se rapprocher.

Représentons par $y = fx$ ce que devient $y = Fx$ après qu'on y a substitué les valeurs de ces deux constantes, la courbe $y = fx$ sera une osculatrice du premier ordre, à la courbe $y = \phi x$; et si, toujours en vertu des valeurs arbitraires qu'on peut donner aux constantes, on élimine trois des constantes de l'équation $y = Fx$, au moyen des équations suivantes,

$$Fx' = \phi x', \quad \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\phi x'}{dx'^2} \dots (71),$$

et qu'on représente par ψx ce que devient Fx , après cette substitution, cette courbe $y = \psi x$ sera une osculatrice du deuxième ordre à la courbe $y = \phi x$, dont elle approchera encore plus, et ainsi de suite; de sorte que pour une osculatrice d'*n*^{ème} ordre, nous aurons les équations

$$Fx' = \phi x', \quad \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\phi x'}{dx'^2}, \quad \dots \quad \frac{d^n Fx'}{dx'^n} = \frac{d^n \phi x'}{dx'^n} \dots (72).$$

147. Nous allons démontrer que, de deux osculatrices qu'on a obtenues ainsi, en faisant varier les constantes d'une même équation, celle de ces osculatrices qui est d'un ordre inférieur, ne peut passer entre l'autre et la courbe à laquelle on a mené ces osculatrices.

Fig. 24. Par exemple, soit MB (fig. 24), la courbe $y = \phi x$, et MC son osculatrice $y = \psi x$ du second ordre; il s'agit de démontrer que l'osculatrice $y = fx$ du premier ordre, ne peut passer entre les courbes MB et MC.

Pour cet effet, en mettant $x' + h$ à la place de x , dans ces équations, nous trouverons

$$P'M' \text{ ou } \phi(x' + h) = \phi x' + \frac{d\phi x'}{dx'} h + \frac{d^2 \phi x'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3 \phi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

$$P'M'' \text{ ou } \psi(x' + h) = \psi x' + \frac{d\psi x'}{dx'} h + \frac{d^2 \psi x'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3 \psi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

$$f(x' + h) = f x' + \frac{df x'}{dx'} h + \frac{d^2 f x'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3 f x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

la courbe $y = \psi x$ étant une osculatrice du second ordre à $y = \phi x$, il faut qu'on ait

$$\psi x' = \phi x', \quad \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'}, \quad \frac{d^2 \psi x'}{dx'^2} = \frac{d^2 \phi x'}{dx'^2}.$$

D'une autre part, $y = fx$ étant une osculatrice du premier ordre à $y = \phi x$, on a encore

$$fx' = \phi x', \quad \frac{df x'}{dx'} = \frac{d\phi x'}{dx'};$$

en vertu de ces équations, on a donc

$$\phi x' = \psi x' = f x', \\ \frac{d\phi x'}{dx'} = \frac{d\psi x'}{dx'} = \frac{df x'}{dx'},$$

et seulement

$$\frac{d^2 \phi x'}{dx'^2} = \frac{d^2 \psi x'}{dx'^2};$$

faisons, pour simplifier,

$$\begin{aligned}\varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h &= K, \\ \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} &= V;\end{aligned}$$

les trois développemens précédens pourront s'écrire ainsi :

$$P'M' \text{ ou } \varphi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$P'M'' \text{ ou } \psi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$f(x'+h) = K + \frac{d^2fx'}{dx'^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3fx'}{dx'^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.};$$

et en observant que tous les termes, à partir de celui qui est affecté de h^3 , ont h^3 pour facteur commun, nous pourrions supposer

$$\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} = Mh^3;$$

et en faisant des réductions analogues dans les autres équations, on aura

$$\varphi(x'+h) = K + Vh^2 + Mh^3,$$

$$\psi(x'+h) = K + Vh^2 + Nh^3,$$

$$f(x'+h) = K + \frac{1}{2} \frac{d^2fx'}{dx'^2} h^2 + Ph^3.$$

Les courbes $y = fx$ et $y = \psi x$ étant des osculatrices, l'une du premier ordre et l'autre du second ordre, V diffère nécessairement de $\frac{1}{2} \frac{d^2fx'}{dx'^2}$. On ne peut donc faire que deux hypothèses sur V , savoir :

$$V < \frac{1}{2} \frac{d^2fx'}{dx'^2}, \text{ ou } V > \frac{1}{2} \frac{d^2fx'}{dx'^2}.$$

Si V est moindre que $\frac{1}{2} \frac{d^2 f x'}{dx'^2}$, soit Z l'excès de $\frac{1}{2} \frac{d^2 f x'}{dx'^2}$ sur V , on aura

$$V + Z = \frac{1}{2} \frac{d^2 f x'}{dx'^2};$$

si au contraire V surpasse $\frac{1}{2} \frac{d^2 f x'}{dx'^2}$, la quantité Z sera négative.

En substituant cette valeur de $\frac{1}{2} \frac{d^2 f x'}{dx'^2}$, dans celle de... $f(x' + h)$, et en observant que h^2 est facteur commun, nos trois développemens deviendront

$$\begin{aligned}\phi(x' + h) &= K + (V + Mh)h^2, \\ \psi(x' + h) &= K + (V + Nh)h^2, \\ f(x' + h) &= K + (V + Z + Ph)h^2.\end{aligned}$$

Or, en faisant h très petit, il est possible que la quantité Z indépendante de h soit plus grande que les expressions Mh et Nh qui tendent vers zéro. Alors, si Z est positif, $f(x' + h)$ surpasse $\phi(x' + h)$ et $\psi(x' + h)$; dans ce cas, on a donc $f(x' + h)$ ou $P'M''$ (fig. 24) plus grand que $P'M'$ et que $P'M''$, ce qui montre que la courbe $y = fx$, représentée par MM'' , ne peut passer entre les deux autres.

Si, au contraire, Z est négatif, on a $f(x' + h)$ ou $P'M''$, moindre que $P'M'$ et que $P'M''$. La courbe MM'' étant alors celle qui s'approche le plus de l'axe des x , ne peut être comprise entre les deux autres.

Fig. 5. 148. On peut maintenant expliquer pourquoi la ligne droite (fig. 5), qui, art. 145, est une osculatrice du premier ordre, est tangente à la courbe; car il résulte de notre théorie, qu'entre cette droite et la courbe, on ne peut faire passer aucune autre droite, ce qui est la propriété de la tangente.

On dit que la tangente a un contact du premier ordre

avec la courbe. En général, une osculatrice d'un ordre n a un contact du même ordre avec la courbe à laquelle elle est osculatrice; ainsi, lorsqu'on a, entre deux courbes, les équations

$$\phi x' = Fx', \quad \frac{d\phi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}, \quad \frac{d^2\phi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2},$$

ces courbes ont entre elles un contact du second ordre; ce contact sera du troisième ordre si, outre ces équations, on a encore celle-ci :

$$\frac{d^3\phi x'}{dx'^3} = \frac{d^3Fx'}{dx'^3},$$

et ainsi de suite.

149. L'équation du cercle, qui est

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

renfermant trois constantes, nous pouvons déterminer le cercle qui a un contact du second ordre, avec une courbe MN (fig. 25), dont on a l'équation. Pour cet effet, soient Fig. 25. x' et y' les coordonnées du point M de la circonférence de ce cercle; la valeur de y' sera donnée par l'équation

$$(y' - \beta)^2 + (x' - \alpha)^2 = r^2. \quad (73),$$

et devra remplacer Fx' dans les équations du contact, qui sont

$$\phi x' = Fx', \quad \frac{d\phi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}, \quad \frac{d^2\phi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2};$$

si nous adoptons en même temps x et y pour les coordonnées de la courbe $y = \phi x$, au point de contact, les équations précédentes deviendront

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \dots (74);$$

il faudra donc mettre, pour les quantités y' , $\frac{dy'}{dx'}$, et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$,

leurs valeurs tirées de l'équation (73),* et de ses différentielles successives, qui sont

$$(y' - \beta) \frac{dy'}{dx'} + x' - a = 0 \dots (75),$$

$$(y' - \beta) \frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{dy'^2}{dx'^2} + 1 = 0 \dots (76).$$

Or, substituer dans les équations (74) les valeurs de y' , $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, données par les équations (73), (75) et (76), n'est autre chose qu'éliminer ces quantités entre les équations (73), (74), (75) et (76), ce qui revient à effacer les accens dans les équations (73), (75) et (76), en observant d'ailleurs que quand

$$y = y' \quad \text{on a} \quad x = x';$$

supprimant donc les accens, on trouvera

$$(y - \beta)^2 + (x - a)^2 = r^2 \dots (77),$$

$$(y - \beta) \frac{dy}{dx} + x - a = 0 \dots (78),$$

$$(y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = 0 \dots (79).$$

De cette dernière équation on tire

$$y - \beta = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \dots (80).$$

Mettant cette valeur dans l'équation (78), on obtient

$$x - a = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} \dots (81).$$

Si dans l'équation (77) on substitue ces valeurs de $y - \beta$ et de $x - \alpha$, on aura

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} + \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \frac{dy^2}{dx^2} = \gamma^2,$$

et, en ajoutant les numérateurs qui ont un facteur commun, on aura

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \gamma^2;$$

cette équation se réduit à

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = \gamma^2;$$

et, en tirant la racine carrée, donne

$$\pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \gamma.$$

150. Le double signe est relatif à la position de γ : si la courbe tourne sa concavité vers l'axe de x , alors $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera négatif; et pour qu'alors γ se détermine positivement, nous prendrons γ avec le signe négatif, et nous écrirons

$$\gamma = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \dots (82);$$

car la courbe, tournant sa concavité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tient la place d'une quantité négative, qui, lorsqu'elle sera substituée dans la valeur de γ , la rendra positive.

151. On a donné au cercle que nous venons de considérer, le nom de *cercle osculateur*, et à son rayon, celui de *rayon de courbure*; il ne s'agira donc, pour obtenir le rayon de courbure, que d'avoir l'équation de la courbe, pour en déduire les coefficients différentiels qu'on substituera dans la formule 82.

Si la courbe devait tourner sa convexité vers l'axe des x , nous ferions précéder la valeur de γ du signe positif.

152. On écrit quelquefois ainsi la valeur de γ :

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy''}.$$

Cette formule se déduit facilement de l'équation (82); car en réduisant au même dénominateur les deux termes qui sont sous la parenthèse, et en observant que la puissance $\frac{3}{2}$, de dx^2 , est dx^3 , on obtiendra

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 \frac{d^2y}{dx^2}} = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy''}.$$

153. Pour donner une application de la formule 82, cherchons le rayon de courbure de la parabole NAM
Fig. 26. (fig. 26), dont l'équation est $x^2 = my$; nous trouverons

$$2x dx = m dy, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m};$$

donc

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{4x^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left[\frac{4}{m^2}\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}},$$

et en élevant les deux facteurs à la puissance $\frac{3}{2}$, on a

$$\gamma = \frac{8 \left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{m^3} = \frac{\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{m^2}{4}} \dots (83);$$

or, la normale à la parabole ayant pour expression.....

$\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on voit que le rayon de courbure de la parabole est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre.

154. Le cercle osculateur peut servir à mesurer la courbure de la courbe en un point M (fig. 25); car, si en ce point M on décrit, avec le rayon de courbure, un arc ML très petit, cet arc pourra être considéré comme l'arc même de la courbe, dont il s'écarte très peu; or, plus l'arc ML a de courbure, plus son rayon est petit; d'où il résulte que par le décroissement du rayon de courbure, ou par son accroissement, on pourra connaître si la courbe augmente ou diminue de courbure.

Fig. 25.

Par exemple, en considérant l'équation (83), qui donne le rayon de courbure de la parabole, on voit qu'au sommet de la courbe, où $x = 0$, $\gamma = \frac{m}{2}$; mais que lorsque x s'accroît successivement, γ augmente, ce qui annonce que la courbure de la parabole va en diminuant, lorsqu'on s'écarte du sommet.

155. $\frac{dy}{dx}$ exprimant la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente en M (fig. 27) fait avec l'axe des x , l'équa-
tion de la normale assujétie à passer par un point dont les coordonnées sont α et β , sera

Fig. 27.

$$y - \beta = -\frac{dy}{dx} (x - \alpha).$$

Cette équation étant la même que l'équation (78) dans laquelle α et β sont les coordonnées du centre du cercle osculateur, on voit que le rayon de ce cercle est une normale à la courbe.

156. Si maintenant, par tous les points d'une courbe Fig. 28. $MM'M''$, etc. (fig. 28), on mène des rayons de courbure $MO, M'O', M''O''$, etc., on construira une suite de points O, O', O'' , etc.; ces points étant assujétis à une certaine loi, (*) cela suffit pour que nous puissions donner le nom de *courbe* à leur système; mais nous ne prononcerons encore rien sur la nature de cette nouvelle courbe qu'on appelle la *développée de la courbe* $MM'M''$. Celle-ci, considérée relativement à la développée, est appelée la *développante*.

157. Si l'on passe d'un point à l'autre de la développée, non-seulement x et y varient, mais encore α, β et γ varient en même temps; car α et β étant, en général, les coordonnées du cercle osculateur, comme la développée est formée par le système de ces centres, il en résulte que α et β sont les coordonnées de la développée; coordonnées qui doivent varier d'un point de la courbe à l'autre. Il en est de même de γ , qui est le rayon du cercle osculateur, et qui représente alors la distance d'un point quelconque de la développée à un point de la développante d'où est parti γ . Par conséquent, en différenciant l'équation (78), par rapport à toutes les lettres (**) et en divisant par dx , nous

(*) Elle est implicitement renfermée dans l'équation de la courbe $MM'M''$, puisque cette courbe étant donnée, la position de ces points en résulte.

(**) On ne peut pas différencier autrement l'équation

$$(\gamma - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2,$$

et ses dérivés; cependant il semble que nous ayons agi autrement, lorsque de l'équation (73) nous avons déduit les équations (75) et (76). Je répondrai que, comme nous avons deux constantes arbitraires dans

obtiendrons

$$(y - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \frac{d\beta}{dx} + 1 - \frac{da}{dx} = 0;$$

retranchant l'équation (79) de celle-ci, il reste

$$-\frac{dy}{dx} \frac{d\beta}{dx} - \frac{da}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}} = -\frac{da}{dx} \times \frac{1}{\frac{d\beta}{dx}};$$

or, art. 67,

$$\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}} = \frac{dx}{d\beta};$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{da}{dx} \times \frac{dx}{d\beta},$$

et par conséquent, art. 24,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{da}{d\beta};$$

si l'on substitue cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (78), on obtiendra

$$y - \beta = \frac{d\beta}{da} (x - a) \dots (84).$$

L'équation (73), nous les avons déterminées par la condition que les fonctions représentées par les premiers membres des équations (75) et (76), fussent nulles; mais, sans cela, nous n'aurions pas eu le droit de conclure de ce que l'équation (73) a lieu, que les équations (75) et (76) doivent aussi avoir lieu.

158. Nous avons vu, article 155, que l'équation....
 $y - \beta = -\frac{dx}{dy}(x - \alpha)$, était celle du rayon de courbure
 qui passait par le point dont les coordonnées sont x et y .
 En remplaçant $-\frac{dx}{dy}$ par $\frac{d\epsilon}{d\alpha}$, ce sera toujours l'équation du
 même rayon; mais l'équation (84) étant aussi celle d'une
 tangente menée au point de la développée, dont les coor-
 données sont α et β (*), le rayon de courbure est donc
 tangente à la développée.

159. Comme dans la démonstration suivante nous em-
 ploierons la différentielle d'un arc de courbe, nous allons
 déterminer cette différentielle.

Fig. 31. Supposons qu'une abscisse $AP = x$ (fig. 31) s'accroisse
 de $PP' = h$; si nous menons la parallèle MO à l'axe des x ,
 nous aurons évidemment

$$\text{corde } MM' = \sqrt{MO^2 + M'O^2} = \sqrt{h^2 + M'O^2};$$

or,

$$M'O = f(x + h) - fx = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

substituant cette valeur dans l'expression de MM' , et re-
 présentant par A , par B , etc., les coefficients de h^3 , de
 h^4 , etc., on aura

$$MM' = \sqrt{h^2 + \frac{dy^2}{dx^2} h^2 + Ah^3 + Bh^4 + \text{etc.}},$$

(*) Observons qu'en général α et β étant les coordonnées d'un point
 quelconque de la développée, l'équation de la développée sera $\beta = f\alpha$;
 donc $\frac{d\beta}{d\alpha}$ représente, art. 71, l'angle que la tangente au point α , β , fait
 avec l'axe des abscisses.

ou

$$MM' = \sqrt{h^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + Ah^3 + Bh^4 + \text{etc.}},$$

donc

$$\frac{MM'}{h} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ah + Bh^2 + \text{etc.}}$$

Dans le cas de la limite, la corde se confond avec l'arc que je représenterai par s , de sorte que nous aurons

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

d'où nous tirerons, en multipliant par dx ,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

160. Pour la développée, dont les coordonnées sont α et β , nous aurons donc également

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

161. Différencions maintenant l'équation (77) par rapport à toutes les lettres, nous trouverons

$$(y - \beta) (dy - d\beta) + (x - \alpha) (dx - d\alpha) = r dy;$$

l'équation (78) nous donne

$$(y - \beta) dy + (x - \alpha) dx = 0;$$

retranchant ce résultat de l'équation précédente, il nous reste

$$-(y - \beta) d\beta - (x - \alpha) d\alpha = r dy \dots (85).$$

Si dans cette équation (85) et dans l'équation (77), nous substituons la valeur de $y - \beta$, donnée par l'équation (84),

nous trouverons ces deux équations

$$-\frac{d\beta^2}{d\alpha}(x-a)-(x-a)d\alpha=\gamma d\gamma,$$

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}(x-a)^2+(x-a)^2=\gamma^2;$$

mettant $x-a$ en facteur commun, et tirant la racine carrée de la seconde, ces équations deviennent

$$-(x-a)\frac{d\beta^2+d\alpha^2}{d\alpha}=\gamma d\gamma,$$

$$(x-a)\frac{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}{d\alpha}=\gamma;$$

divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient

$$d\gamma=-\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}.$$

Or nous avons vu, art. 160, qu'en appelant s un arc de la développée, on avait

$$ds=\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2};$$

en comparant cette équation à la précédente, nous en déduirons

$$d\gamma=-ds, \text{ ou } d(\gamma+s)=0;$$

et comme toute fonction dont la différentielle est nulle, est constante, nous avons donc $\gamma+s=\text{constante}$; donc si le rayon de courbure s'augmente, il faut que s diminue d'autant.

On énonce cette proposition en disant que *le rayon de courbure varie par les mêmes différences que la développée*.

Fig. 29. 162. Soient (fig. 29) $MO=\gamma$; $OB=s$; $M'O'=\gamma$; $O'B=s'$; nous avons donc, pour le rayon de courbure MO ,

$$\gamma+s=\text{constante},$$

ou

$$MO+\text{arc } OB=\text{constante} \dots (86).$$

Pareillement, le rayon de courbure $M'O'$ donne lieu à l'équation

$$r' + s' = \text{constante},$$

ou

$$M'O' + \text{arc } O'B = \text{constante} \dots (87);$$

les seconds membres des équations (86) et (87), représentant une même constante, nous tirerons de ces équations,

$$M'O' + \text{arc } O'B = MO + \text{arc } OB,$$

et par conséquent,

$$M'O' - MO = \text{arc } OB - \text{arc } O'B = \text{arc } OO',$$

ce qui nous apprend que la *différence de deux rayons de courbure est égale à l'arc qu'ils comprennent entre eux*.

163. Il suit de là, que si l'on applique sur la développée OB (fig. 29) un fil qui, se terminant tangentielllement, soit Fig. 29. fixé au point M de la développante MC, lorsqu'on développera ce fil, en le laissant constamment tendu, son extrémité M décrira dans ce mouvement la développante MC; car, en supposant que dans son mouvement il soit arrivé dans une position $O'M'$, il se sera accru de OO' , et par conséquent égalera en longueur le rayon de courbure qui passe par le point O' ; donc l'extrémité M' de ce fil sera sur la développante.

164. Voici de quelle manière on peut trouver l'équation de la développée : 1°. on tirera de l'équation de la courbe, les valeurs de y , et des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.; 2°. on substituera ces valeurs dans les équations (78) et (79), ce qui donnera deux nouvelles équations, qui ne seront plus que des fonctions de x ; 3°. éliminant x entre ces équations, on parviendra à une équation entre α et β . Cette équation sera celle de la développée.

165. Déterminons par ce procédé la développée de la parabole, dont l'équation est $x^2 = my$: en différenciant on trouve

$$2x dx = m dy,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m};$$

substituant, dans les équations (78) et (79), ces valeurs de y , de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ces équations deviennent

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right) \frac{2x}{m} + x - \alpha = 0 \dots (88),$$

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right) \frac{2}{m} + \frac{4x^2}{m^2} + 1 = 0 \dots (89);$$

retranchant l'équation (88) de l'équation (89), multipliée par x , on obtiendra

$$\alpha + \frac{4x^3}{m^2} = 0 \dots (90).$$

D'une autre part, l'équation (89) multipliée par m^2 , et réduite, nous donne

$$6x^2 - 2m\beta + m^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{3x^2}{m} + \frac{m}{2} \dots (91).$$

En éliminant x entre les équations (90) et (91), on aura l'équation de la développée.

Mais avant de faire cette opération, remarquons que pour l'origine où $x = 0$, les équations (90) et (91) se réduisent à

Fig. 32. $\alpha = 0$, $\beta = \frac{m}{2}$; en prenant donc $AB = \frac{m}{2}$ (fig. 32), on a le point B de la développée; on voit ensuite, par l'équation

tion (91), qu'en donnant des valeurs positives ou négatives à x , β augmente à mesure que ces valeurs s'accroissent, d'où il résulte que la développée se compose de deux branches BC et BD.

166. Pour éliminer x entre les équations (90) et (91), la première, élevée au carré, donne

$$x^6 = \alpha^2 \frac{m^4}{16};$$

d'une autre part, on tire de l'équation (91),

$$x^3 = \left(\beta - \frac{m}{2}\right) \frac{m}{3};$$

en élevant au cube les deux membres de cette équation, on trouve

$$x^6 = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 \frac{m^3}{27};$$

égalant ces deux valeurs de x^6 , et divisant par m^3 , on obtient

$$\alpha^2 \frac{m}{16} = \left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 \frac{1}{27};$$

appelons β' la quantité $\beta - \frac{m}{2}$, et multiplions par 27, cette équation devient

$$\beta'^3 = \frac{27}{16} m \alpha^2 = n \alpha^2 (*),$$

(*) Il est facile de prouver que les branches BC, BD se tournent leurs convexités; car en différenciant l'équation $\beta'^3 = n \alpha^2$, ou $\beta' = n \alpha^{\frac{2}{3}}$, on trouve $\frac{d\beta'}{d\alpha} = -\frac{2}{3} n^{\frac{1}{3}} \alpha^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{n}{\alpha^4}}$, valeur négative pour α positif comme pour α négatif, ce qui prouve que chaque branche tourne sa concavité vers l'axe des x .

Fig. 3a. en faisant $\frac{27}{16} m = n$; l'origine est alors transportée en B,

puisque $\beta' = \beta - \frac{m}{2}$.

167. Une osculatrice peut être située de deux manières différentes, à l'égard de la courbe avec laquelle elle est en contact : 1°. elle peut avoir ses deux branches toutes deux

Fig. 33. au-dessus de la courbe, comme dans la fig. 33, ou toutes

Fig. 34. deux au-dessous, comme dans la fig. 34; alors l'osculatrice ne fera que toucher la courbe; 2°. l'osculatrice peut avoir

une branche au-dessus de la courbe et l'autre au-dessous, Fig. 35. comme dans la fig. 35; dans ce cas, l'osculatrice coupera la courbe au point M.

Fig. 36. 168. On va démontrer (fig. 36) que le cercle osculateur coupe la courbe.

Soient pour une même abscisse $x + h$,

Y l'ordonnée de la courbe,

Y' l'ordonnée de l'osculatrice;

on a donc

$$\left. \begin{aligned} Y &= \varphi(x+h) = \varphi x + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.}, \\ Y' &= F(x+h) = Fx + A'h + B'h^2 + C'h^3 + \text{etc.}, \end{aligned} \right\} \dots (92).$$

Or, puisque le cercle est une osculatrice du second ordre, les trois premiers termes de ces développements seront les mêmes; donc la différence des ordonnées, qui correspondent à $x + h$, sera

$$(C - C')h^3 + \text{etc.} \dots (93).$$

Supposons maintenant que l'abscisse devienne $x - h$; il faudra changer h en $-h$ dans la différence des ordonnées, qui deviendra

$$- (C - C')h^3 + \text{etc.} \dots (94).$$

Or, comme le premier terme des suites (93) et (94) peut surpasser la somme de tous les autres termes, en prenant h

assez petit, il en résulte que la différence des ordonnées changera de signe, lorsque l'abscisse, au lieu d'être $x + h$, sera $x - h$; ainsi, en prenant (fig. 36) $PP'' = PP' = h$, si Fig. 36. la différence des ordonnées correspondantes à $x + h$ est une quantité positive, c'est-à-dire si l'ordonnée $P'M'$ de la courbe surpasse $P'N'$, l'ordonnée $P''N''$ de l'osculatrice surpassera l'ordonnée $P''M''$ de la courbe : d'où l'on conclura que l'osculatrice est d'un côté au-dessus de la courbe et de l'autre au-dessous, et par conséquent la coupe.

Ce que nous disons du cercle, qui est une osculatrice du deuxième ordre, peut s'appliquer à toute osculatrice d'ordre pair.

169. Si l'osculatrice était d'un ordre impair, elle toucherait seulement la courbe, au lieu de la couper. Cela est évident d'après la démonstration précédente.

170. Voici le théorème que nous avons promis de donner, art. 138, sur les points multiples. Si les courbes qui se réunissent en un de ces points, ont une tangente commune, dont l'équation soit représentée par $ax + b$, nous changerons Fx en $ax + b$, dans la seconde des équations (92), ce qui donnera $\frac{dFx}{dx}$ ou $A' = a$, et tous les autres coefficients de cette équation seront nuls. La tangente étant une osculatrice du premier ordre, $ax + Ah$ égalera $Fx + A'h$, ce qui réduira la différence des équations (92) à $Y - Y' = Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.}$

Cette différence des ordonnées devant avoir une valeur double, QM et QM' (fig. 30), il faut que l'un des coefficients différentiels qui sont représentés par Fig. 30.

$B, C, \text{etc.}$ ait deux valeurs. Soit $\frac{d^2x}{dx^2}$ ce coefficient; si l'on prend les différentielles successives de l'équation $Pdx + Qdy = 0$, nous avons vu, art. 143, qu'à chaque différenciation le terme Q reste toujours facteur de la différentielle de l'ordre le plus élevé de y ; de sorte que la différentielle de l'ordre n de la fonction proposée, pourra être représentée par $Q \frac{d^ny}{dx^n} + K = 0$. $\frac{d^ny}{dx^n}$ devant avoir deux valeurs, on prouvera, comme dans l'art. 137, que Q est nul. Cette valeur de Q réduira celle de P à px ; d'où il suit que l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q}$ donnera $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}$.

Application du théorème de Taylor au développement des fonctions des deux variables qui reçoivent des accroissemens.

171. Lorsque dans une fonction u , de deux variables indépendantes x et y , on change x en $x+h$, et y en $y+k$, le théorème de Taylor peut nous donner le développement de cette fonction. En effet, si l'on substitue d'abord à x la valeur $x+h$, on aura

$$f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc...} \quad (95);$$

h étant en évidence dans ce développement, y ne peut être contenu que dans les fonctions $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}$, etc. Changeant donc y en $y+k$ dans ces fonctions, nous remplacerons, dans l'équation (95),

$$u \text{ par } u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$\frac{du}{dx} \text{ par } \frac{du}{dx} + \frac{d}{dy} \frac{du}{dx} k + \frac{d^2}{dy^2} \frac{du}{dx} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3}{dy^3} \frac{du}{dx} \frac{k^3}{2.3} + \text{etc.};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ par } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d}{dy} \frac{d^2u}{dx^2} k + \frac{d^2}{dy^2} \frac{d^2u}{dx^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3}{dy^3} \frac{d^2u}{dx^2} \frac{k^3}{2.3} + \text{etc.};$$

$$\text{etc., etc., etc., etc., etc., etc.};$$

et formant autant de lignes qu'il y a de termes dans l'équation (95), nous obtiendrons

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \text{etc.} \left. \begin{array}{l} + \frac{du}{dx} h + \frac{d}{dy} \frac{du}{dx} hk + \text{etc.} \\ + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} \dots\dots (96).$$

172. Si l'on eût fait les substitutions dans un ordre inverse, on aurait d'abord trouvé, en changeant y en $y+k$,

$$f(x, y+k) = u + \frac{du}{dy} k + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{k^3}{2.3} + \text{etc.};$$

et en mettant ensuite dans chaque terme $x+h$ à la place de x , on serait parvenu à ce développement

$$f(y+k, x+h) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \left. \begin{array}{l} + \frac{du}{dy} k + \frac{d}{dx} \frac{du}{dy} hk + \text{etc.} \\ + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} \dots\dots (97).$$

L'ordre dans lequel nous avons fait ces substitutions étant arbitraire, puisque devant mettre $x+h$ partout où entre x , et $y+k$ partout où entre y , ces opérations ne peuvent influer l'une sur l'autre; il en résulte que les deux développemens 96 et 97 doivent être identiques, et que, par conséquent, les termes affectés des mêmes produits de h et de k ont les mêmes valeurs. Si nous égalons donc entre eux les

termes qui sont multipliés par hk , nous obtiendrons

$$\frac{d \cdot \frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d \cdot \frac{du}{dy}}{dx}, \quad \text{ou plutôt} \quad \frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx}.$$

Cette équation nous apprend que pour prendre la différentielle seconde du produit de deux variables, l'ordre des différenciations est arbitraire. On prouverait la même chose pour les coefficients différentiels des ordres supérieurs, en égalant entre eux les coefficients différentiels des autres termes des équations (96 et 97).

Des maxima et minima, dans les fonctions de deux variables.

173. Nous venons de voir, art. 171, que si, dans une fonction de deux variables indépendantes x et y , on remplaçait x par $x+h$, et y par $y+k$, le développement de $f(x+h, y+k)$ émit donné par l'équation (96). Si dans cette équation nous représentons $f(x+h, y+k)$ par

U , k par mh , et $\frac{d \cdot \frac{du}{dx}}{dy}$ par $\frac{d^2 u}{dx dy}$, nous aurons

$$U = u + h \left(\frac{du}{dy} m + \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{d^2 u}{dy^2} m^2 + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} m + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \text{termes en } h^3, \text{ en } h^4, \text{ etc.} \dots (98).$$

Pour que u soit un maximum ou un minimum, il faut que, quelque valeur que l'on attribue aux accroissemens h et k , U soit toujours plus grand que u ou toujours plus petit; or, cela n'est possible que d'autant que le terme $h \left(\frac{du}{dy} m + \frac{du}{dx} \right)$ est nul, car si cela n'était pas, ce terme, art. 89, pouvant être rendu plus grand que la somme algébrique de tous ceux qui le suivent, moyennant une valeur convenable de h ; en prenant successivement cette valeur négative et positive, on rendrait, dans l'un des cas, U plus grand, et dans l'autre moindre que u ; ainsi, pour que cette fonction u soit un maximum ou un minimum, il faut que l'on ait

$$h \left(\frac{du}{dy} m + \frac{du}{dx} \right) = 0.$$

ou plutôt

$$\frac{du}{dy} m + \frac{du}{dx} = 0.$$

L'accroissement k étant arbitraire, il en doit être de même de m ; par conséquent cette équation a lieu quelque soit m , ce qui exige qu'elle se partage en celles-ci :

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0.$$

174. Examinons maintenant ce qui distingue le maximum du minimum. Pour cet effet, remarquons que puisque le terme en h est nul, c'est le terme en h^2 qui doit décider du signe de la somme algébrique de tous ceux qui suivent u ; il faut donc que le terme en h^2 , s'il n'est pas nul, ne puisse, par des valeurs de h et de k , se déterminer tantôt positivement, tantôt négativement, autrement U pourrait être, dans un cas, plus petit, et dans un autre plus grand que u ; ainsi, nous allons chercher la condition qui doit avoir lieu pour que le terme en h^2 conserve toujours le même signe, quelles que soient les valeurs qu'on donne à h et à k . Dans cette vue, représentons le terme en h^2 de l'équation (98) par

$$\frac{1}{2} h^2 (Am^2 + 2Bm + C);$$

mettant A en facteur commun, ce terme deviendra

$$\frac{1}{2} Ah^2 \left(m^2 + 2 \frac{B}{A} m + \frac{C}{A} \right) \dots (99);$$

ajoutons sous la parenthèse la quantité identiquement nulle $\frac{B^2}{A^2} - \frac{B^2}{A^2}$, l'expression (99) pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{2} Ah^2 \left[\left(m + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2} \right] \dots (100);$$

et l'on voit qu'elle sera toujours du signe de A si, C et A étant de mêmes signes, l'on a $\frac{C}{A} > \frac{B^2}{A^2}$, c'est-à-dire $AC > B^2$; car alors la quantité, qui est multipliée par $\frac{1}{2} Ah^2$, sera essentiellement positive, et le signe de l'expression (100) dépendra de celui de A , de sorte qu'on aura un maximum ou un minimum, suivant que A sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant le signe de $\frac{d^2u}{dy^2}$, qui est le même que celui de $\frac{d^2u}{dx^2}$, parce qu'on a vu que C et A étaient supposés être de même signe.

De la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires.

Fig. 79

175. Considérons une courbe BDC (fig. 79) dans laquelle on a déterminé, de position, un point M, à l'aide des coordonnées rectangulaires $AP = x$ et $PM = y$; ce point peut être également déterminé si l'on donne l'angle MAC et le rayon vecteur AM; mais comme on mesure ordinairement les angles par les arcs, nous remplacerons l'angle MAC par l'arc mo , décrit avec un rayon pris pour unité; ainsi, en nommant t cet arc mo , et u le rayon vecteur AM, nous pouvons substituer le système des coordonnées polaires t et u à celui des coordonnées rectangulaires $AP = x$ et $PM = y$.

176. Il est à observer que l'origine des abscisses est quelquefois placée ailleurs qu'en o , car le point M est également déterminé, lorsqu'après avoir pris un point o' pour origine, on donne l'arc $o'm$ et le rayon vecteur AM; dans ce cas, nous pouvons représenter $o'm$ par t' , et alors toutes les abscisses, comptées de l'origine o , différeront des abscisses comptées de l'origine o' , d'une quantité constante oo' , et il y aura entre elles la relation suivante :

$$t = t' - oo'.$$

Comme, au moyen de cette relation, on peut toujours changer l'origine de la manière qui nous convient, nous supposerons, pour plus de simplicité, l'origine en o .

177. Représentons maintenant par $F(x, y) = 0$, l'équation dans laquelle nous voulons changer les coordonnées rectangulaires $AP = x$ et $PM = y$ en coordonnées polaires. $om = t$ et $AM = u$, et cherchons les relations qui existent entre ces coordonnées; nous avons évidemment

$$AP = AM \cos MAP, \quad PM = AM \sin MAP,$$

ou

$$x = u \cos t, \quad y = u \sin t \dots (101).$$

Il suffirait donc de substituer ces valeurs dans l'équation représentée par $F(x, y) = 0$, pour obtenir celle qui serait rapportée à des coordonnées polaires.

178. Si l'origine des coordonnées rectangulaires x et y n'est pas au centre A de la courbe (fig. 80); soient x', y' les coordonnées comptées de l'origine A' , et a et b les coordonnées comptées du centre A ; on aura

$$AP = A'Q - A'B, \quad MP = MQ - AB,$$

ou

$$x = x' - a, \quad y = y' - b,$$

valeurs qu'on substituera dans les formules précédentes.

De la transformation des coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires, et détermination de l'expression différentielle de l'arc dans une courbe polaire.

179. L'équation rapportée à des coordonnées polaires étant représentée par $F(t, u) = 0$, on voit d'abord (fig. 79) qu'on peut remplacer u par sa valeur tirée de l'équation

$$AM^2 = AP^2 + PM^2,$$

ou

$$u^2 = x^2 + y^2 \dots (102).$$

A l'égard de t , les équations (101), divisées l'une de l'autre, nous donneront

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t,$$

d'où l'on tire

$$t = \arctan \left(\frac{y}{x} \right).$$

Cette valeur de t et celle de u étant substituées dans l'équa-

tion représentée par $F(t, u) = 0$, on obtient

$$F \left[\arctan \left(\frac{y}{x} \right), \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0 \dots (103).$$

C'est ainsi qu'on parvient à une équation en x et en y , et affectée d'une quantité transcendante.

180. On peut aussi obtenir entre x et y , une équation qui ne contiendra point la transcendante $\arctan \left(\frac{y}{x} \right)$, mais qui renfermera des différentielles; pour cela, on différenciera l'équation qui est représentée par la formule 103, ou, comme cela se pratique, on emploiera le moyen suivant pour arriver à ce but : représentons toujours par $F(u, t) = 0$ l'équation qu'il s'agit de transformer en une fonction des coordonnées rectangulaires x et y ; nous venons de voir, art. 179, que la valeur de u pouvait s'exprimer en x et en y , sans transcendante, mais qu'il n'en était pas de même de t ; c'est pourquoi nous chercherons d'abord à éliminer t entre $F(t, u) = 0$, et la différentielle de cette équation, que nous représenterons par $F(t, u) dt, du = 0$; à la vérité, nous introduirons dans le résultat de l'élimination, les différentielles dt et du ; mais ces différentielles pourront s'exprimer en fonction des variables x, y, dx et dy . En effet, les équations (101) nous donnent

$$\cos t = \frac{x}{u}; \quad \sin t = \frac{y}{u} \dots (104).$$

Divisant l'une de ces équations par l'autre, on obtient

$$\frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{ou} \quad \tan t = \frac{y}{x};$$

différenciant, il vient

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{x dy - y dx}{x^2};$$

remplaçant $\frac{1}{\cos^2 t}$ par sa valeur tirée de la première des équations (104) ; et supprimant le diviseur commun x^2 , on trouve

$$u^2 dt = x dy - y dx,$$

et par conséquent

$$dt = \frac{x dy - y dx}{u^2} \dots (105);$$

et en mettant pour u sa valeur, cette équation devient

$$dt = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

La différentielle de l'autre variable se trouve encore plus facilement; car l'équation (102) nous donne

$$u = \sqrt{x^2 + y^2};$$

cette équation étant différenciée, nous avons

$$du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

au moyen de ces valeurs de dt , de du et de u , on changera l'équation obtenue par l'élimination de t , en une autre qui ne contiendra plus que x , y , dx et dy , et qui par conséquent se rapportera aux coordonnées rectangulaires.

181. On a vu, art. 159, que la différentielle d'un arc z , rapporté aux coordonnées rectangulaires, avait pour expression

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots (106).$$

On peut se proposer de déterminer la différentielle du même arc, lorsque les coordonnées sont polaires; dans ce cas, on substituera dans l'équation (106) les valeurs de dx et de dy , tirées des équations

$$x = u \cos t, \text{ et } y = u \sin t,$$

et l'on trouvera, en différenciant ces équations,

$$\begin{aligned} dx &= -u \sin t \, dt + \cos t \, du, \\ dy &= u \cos t \, dt + \sin t \, du. \end{aligned}$$

Élevant ces équations au carré, et réduisant à l'aide de la formule

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1,$$

on obtiendra

$$dz = \sqrt{u^2 dt^2 + du^2}.$$

Telle est la différentielle de l'arc en fonction des coordonnées polaires.

Des sous-tangentes, sous-normales, normales et tangentes aux courbes polaires.

182. On sait que dans les courbes à coordonnées rectangulaires, la sous-tangente At (fig. 81) est toujours comprise entre le pied P de l'ordonnée et le point t , où une perpendiculaire At à cette ordonnée vient rencontrer la tangente; conservant la même définition pour les courbes polaires, où l'ordonnée n'est plus PM , mais le rayon vecteur AM , la sous-tangente sera alors la perpendiculaire AT , comprise depuis le point A jusqu'à la rencontre T de la tangente. La sous-tangente a donc une position différente dans les courbes polaires que dans les courbes qui ne le sont pas; car dans les unes la sous-tangente est toujours comptée sur l'axe des abscisses, tandis que dans les courbes polaires, où cet axe n'existe pas, la sous-tangente varie de position à chaque point de la courbe.

183. Déterminons maintenant l'expression analytique de la sous-tangente dans les courbes polaires. Pour cet effet, soient AM et AM' (fig. 82) deux rayons vecteurs, et du point M menons la perpendiculaire MP sur le rayon vec-

teur AM' , et, à cette perpendiculaire, menons la parallèle AT ; les triangles semblables ATM' , PMM' nous donneront la proportion

$$PM' : PM :: AM' : AT;$$

d'où l'on tire

$$AT = \frac{AM' \times PM}{PM'};$$

et en observant que PM' est un côté du triangle rectangle PMM' , cette valeur de AT devient

$$AT = \frac{AM' \times PM}{\sqrt{MM'^2 - PM^2}};$$

dans le cas de la limite, AM' est égal à AM , c'est-à-dire à u , PM se confond avec l'arc MN , la corde MM' avec l'arc MM' , et AT devient la sous-tangente. Il ne s'agit donc plus que d'avoir, pour le cas de la limite, les expressions $M'M$ et MN ; la première de ces expressions n'est alors que la différentielle de l'arc de courbe; donc, art. (181),

$$M'M = \sqrt{u^2 dt^2 + du^2};$$

à l'égard de MN , les secteurs ARR' et AMN nous donnent la proportion

$$AR : RR' :: AM : MN,$$

ou

$$1 : RR' :: u : MN;$$

donc $MN = u.RR'$, quantité qui, dans le cas de la limite, se réduit à $u dt$. Mettant ces valeurs de MN et $M'M$ dans celle de AT , après qu'on y aura changé AM' en u , et PM en MN , et réduisant, nous trouverons

$$AT = \frac{u^2 dt}{du}.$$

Telle est l'expression de la sous-tangente.

184. Pour déterminer la sous-normale, nous observerons que la normale SM étant perpendiculaire à la tangente, Fig. 81. l'ordonnée AM (fig. 81) doit être moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale; par conséquent nous avons

$$AT : AM :: AM : \text{sous-normale},$$

ou

$$\frac{u^2 dt}{du} : u :: u : \text{sous-normale};$$

donc

$$\text{sous-normale} = \frac{du}{dt};$$

à l'égard de la normale et de la tangente, les triangles rectangles MAS, MAT donnent

$$MS = \sqrt{MA^2 + AS^2}, \quad MT = \sqrt{MA^2 + AT^2}.$$

Substituant dans ces équations les valeurs de MA, de AS et de AT, nous trouverons

$$\text{normale} = \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}, \quad \text{tangente} = u \sqrt{1 + u^2 \frac{dt^2}{du^2}}.$$

185. Pour trouver l'expression analytique du secteur dans Fig. 82. les courbes polaires, le triangle AM'M (fig. 82) nous donne

$$\text{aire AM'M} = \frac{AM' \times PM}{2};$$

dans le cas de la limite, l'aire du triangle AM'M (fig. 82) devient celle d'un secteur élémentaire, la perpendiculaire PM peut être remplacée par l'arc MN, que nous avons trouvé égal à $u dt$, et AM' se réduit à u . Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous trouverons

$$\text{aire du secteur élémentaire} = \frac{u^2 dt}{2}.$$

On peut aussi exprimer le secteur élémentaire en fonction des coordonnées rectangulaires, car en mettant dans cette équation les valeurs de u et de dt , données par les équations 102 et 105 elle devient

$$\text{aire du secteur élémentaire} = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

De la détermination de l'expression du rayon de courbure dans une courbe polaire.

186. Nous avons donné, art. 149, l'expression du rayon de courbure, rapportée à des coordonnées rectangulaires; en nous réservant la faculté d'affecter cette expression du signe qui rendra γ positif, nous l'écrivons ainsi :

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \dots (107).$$

Pour avoir cette valeur de γ exprimée en fonction des coordonnées polaires, il ne s'agit que d'éliminer les coefficients différentiels qui entrent dans cette expression, au moyen des équations suivantes :

$$x = u \cos t, \quad y = u \sin t;$$

différencions ces équations, et divisons ensuite les résultats l'un par l'autre, nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du \sin t + u \cos t dt}{du \cos t - u \sin t dt};$$

représentons par m et par n les deux termes de cette fraction, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} m &= du \sin t + u \cos t dt \\ n &= du \cos t - u \sin t dt \end{aligned} \right\} \dots (108);$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \dots (109),$$

ou

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Au moyen de cette équation on trouve, pour le numérateur de la

valeur de γ ,

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{n^2 + m^2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

élevant chaque terme de cette fraction à la puissance $\frac{3}{2}$, et observant que la puissance $\frac{3}{2}$ de n^2 est n^3 , on a

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{n^3} \dots (110);$$

différenciant ensuite l'équation (109) nous trouverons

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} = \frac{ndm - mdn}{n^3};$$

divisant le premier membre de cette équation par dx , et le second par n , qui équivaut à dx , nous aurons

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} = \frac{ndm - mdn}{n^3} \dots (111).$$

Au moyen des valeurs données par les équations (110) et (111), l'équation (107) devient

$$\gamma = \frac{(n^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{ndm - mdn} \dots (112).$$

Il ne s'agit plus que de transformer cette équation en une fonction de t et de u . Pour cet effet, on déterminera d'abord la valeur de $n^2 + m^2$, en ajoutant les carrés des équations (108); et en réduisant à mesure, au moyen de l'équation $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, on trouvera

$$n^2 + m^2 = du^2 + u^2 dt^2 \dots (113).$$

A l'égard du dénominateur de l'équation (112), nous différencierons successivement les équations (108) en traitant dt comme constant; et multipliant respectivement les résultats par n et par m , nous trouverons

$$\begin{aligned} ndm &= nd^2u \sin t + 2ndu \cos t dt - nu^2 \sin t dt^2, \\ mdn &= md^2u \cos t - 2mdu \sin t dt - mu^2 \cos t dt^2; \end{aligned}$$

la seconde équation étant retranchée de la première, nous trouverons

$$\begin{aligned} ndm - mdn &= d^2u(n \sin t - m \cos t) \\ &\quad + 2udt(n \cos t + m \sin t) \\ &\quad - udt^2(n \sin t - m \cos t) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} ndm - mdn &= d^2u(n \sin t - m \cos t) \\ &\quad + 2udt(n \cos t + m \sin t) \\ &\quad - udt^2(n \sin t - m \cos t) \end{aligned}} \right\} \dots (114);$$

multipliant la seconde des équations (107) par $\sin t$ et la première par $\cos t$, et les retranchant l'une de l'autre, et réduisant au moyen de la relation $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, nous obtiendrons

$$n \sin t - m \cos t = -u dt.$$

Opérant d'une manière analogue pour former la valeur de $n \cos t + m \sin t$, nous trouverons

$$n \cos t + m \sin t = du.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (114), cette équation deviendra

$$ndn - m dn = -u d^2 u dt + 2 du^2 dt + u^2 dt^2 \dots (116).$$

Au moyen des valeurs que nous venons de déterminer, les équations (113) et (115) changeront l'équation (112) en

$$\gamma = \frac{(du^2 + u^2 dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2 du^2 dt - u d^2 u dt + u^2 dt^2}.$$

Des courbes transcendantes.

187. On appelle ainsi les courbes qui contiennent des quantités transcendentes ou des coefficients différentiels, et en général, les courbes dont les équations ne peuvent être exprimées par un nombre fini de termes algébriques. Nous ferons connaître quelques-unes des plus remarquables de ces courbes.

De la spirale d'Archimède ou de Conon.

188. Voici la génération de cette courbe : tandis que le rayon AB (fig. 37) décrit une révolution, un point A se transporte du centre A à l'extrémité B de ce rayon, et se meut d'un mouvement uniforme, de telle manière que le point mobile qui était en A au commencement de la rotation de AB, se trouve en B lorsque AB a décrit une révolution entière autour du centre A. Le point mobile décrit dans ce mouvement la spirale d'Archimède.

Soient $AB = a$, arc $BN = t$, $AM = u$; on a donc, d'après la définition précédente,

$$AM : AN :: \text{arc } NB : BCDB,$$

ou

$$u : a :: t : 2\pi a,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{t}{2\pi}.$$

Cette courbe, comme on le voit, n'a pas ses coordonnées rectangulaires. Lorsque AB a décrit une révolution entière, l'arc NB équivaut à la circonférence; donc alors $t = 2\pi a$, ce qui change l'équation précédente en

$$u = \frac{2\pi a}{2\pi}, \text{ ou } u = a.$$

Si le point A continue à se mouvoir toujours uniformément, le rayon AB décrira une seconde révolution autour du centre A ; et si l'on prend $BB' = BA$, le point mobile arrivera en B' au bout de cette seconde révolution; alors t sera égal à $4\pi a$, ce qui donnera $u = 2a$; ainsi de suite.

De la spirale logarithmique.

189. La spirale logarithmique est une courbe polaire dans laquelle l'angle AMT (fig. 81), formé par le rayon vecteur AM , avec la tangente MT à la courbe, est constant. Ainsi, en nommant α la tangente trigonométrique de l'angle AMT , nous avons donc

$$\text{tang } AMT = \alpha;$$

or, le triangle TMA , rectangle en A , nous donne la proportion

$$1 : \text{tang } AMT :: AM : AT;$$

donc

$$\text{tang } \angle \text{AMT} = \frac{\text{AT}}{\text{AM}}.$$

Remplaçant le rayon vecteur AM par u , et AT par l'expression $\frac{u^2 dt}{du}$ que nous avons trouvée, art. 183, pour la sous-tangente d'une courbe polaire, nous aurons

$$\text{tang } \angle \text{AMT}, \text{ ou } a = \frac{u dt}{du};$$

d'où nous tirerons

$$\frac{adu}{u} = dt \dots (116);$$

et en intégrant, nous trouverons

$$a \log u = t + \text{constante.}$$

Soit e la base du système Népérien; si l'on regarde a comme le logarithme de e , dans un certain système de tables, on pourra remplacer a par L_e , et alors $L_e \log u$ représentera le logarithme de u dans ce système (*); de sorte que nous aurons

$$L_u = t + \text{constante.}$$

190. On peut construire la spirale logarithmique par points de la manière suivante : ayant partagé la circonférence $OO'O''$ (fig. 83) en parties égales, on mènera des rayons aux Fig. 83. points de division, et sur ces rayons on prendra les parties

(*) Pour le démontrer, soit e la base du système Népérien; nous aurons $u = e^{\log u}$; prenant les logarithmes dans le système des tables indiqué par L , nous aurons

$$L_u = L(e^{\log u}) = \log u L_e.$$

Am , Am' , Am'' , Am''' , etc., qui soient en progression géométrique; les points m , m' , m'' , m''' , m^{iv} , etc., appartiendront à une spirale logarithmique. En effet, en supposant que les parties mm' , $m'm''$, $m''m'''$, etc., aient très peu d'étendue, on pourra les regarder comme des lignes droites, et alors il sera facile de prouver que les triangles Amm' , $Am'm''$, $Am''m'''$, etc., sont semblables; en effet, les angles en A sont égaux par construction, et les angles $mm'A$, $m'm''A$, $m''m'''A$, etc., le sont par la propriété principale de la courbe; nous avons donc cette suite de proportions :

$$Am : Am' :: Am' : Am'',$$

$$Am' : Am'' :: Am'' : Am''',$$

$$\text{etc., etc., etc.,}$$

ce qui nous montre que les ordonnées Am , Am' , Am'' , Am''' , etc., sont en progression géométrique.

191. Dans la spirale logarithmique, la normale est égale au rayon de courbure. En effet, l'expression de ce rayon, dans une courbe polaire, étant, art. 186,

$$\gamma = \frac{(du^2 + u^2 dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2 dt - u d^2 u dt + u^2 dt^3},$$

il faudra, dans cette formule, mettre les valeurs de du et de $d^2 u$ tirées de l'équation de la spirale logarithmique; or, l'équation (116) nous donne

$$du = \frac{u dt}{a}, \quad d^2 u = \frac{du}{a} dt = \frac{u dt^2}{a^2};$$

substituant ces valeurs dans celle de γ , nous obtiendrons

$$\gamma = \frac{\left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{u^2}{a^2} + u^2} = \left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{u^2}{a^2} + u^2}.$$

D'une autre part, si dans l'expression de la normale, qui est, art. 186

$$\sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}},$$

nous substituons la valeur de $\frac{da^2}{dt^2}$, nous trouverons de même $\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + u^2}$, ce qui prouve que la normale est égale, dans cette courbe, à son rayon de courbure; et comme d'ailleurs il est dirigé suivant cette normale, art. 155, il en résulte que ces lignes se confondent.

192. Cette propriété va nous fournir les moyens de démontrer que la développée de la spirale logarithmique est une autre développée. Pour cet effet, le point N de la normale étant considéré comme appartenant au rayon de courbure, et se trouvant à son extrémité, est sur la développée. Soient t' et u' les coordonnées de ce point N (fig. 84), il sera facile de les déterminer en fonction des coordonnées t et u du point M de la courbe; car soit oo' un arc de cercle décrit avec un rayon égal à l'unité; les abscisses des points M et N différeront entre elles de cet arc, qui, à cause que l'angle MAN est droit, sera égal au quart de la circonférence; si en adoptant la notation usitée, nous représentons par $\frac{\pi}{2}$ le quart de la circonférence décrite avec l'unité pour rayon, nous aurons $t' = t + \frac{\pi}{2}$, équation qui étant différenciée, nous donnera $dt = dt'$.

D'une autre part, l'ordonnée polaire u' du point N de la développée étant égale à la sous-normale $\frac{du}{dt}$ de la spirale logarithmique, nous changerons $\frac{du}{dt}$ en u' , dans l'équation de cette courbe, et nous trouverons $u = au'$, et par conséquent $du = a du'$. Substituant ces valeurs de dt , de du et de u dans l'équation (116) de la spirale logarithmique, nous trouverons

$$a \frac{du'}{u'} = dt',$$

équation qui étant de même forme que la précédente, nous apprend que la spirale logarithmique a pour développée une autre spirale logarithmique.

De la spirale hyperbolique et des spirales comprises dans l'équation $u = at^n$.

193. La propriété caractéristique de la spirale hyperbolique est d'avoir une sous-tangente constante. Si nous représentons cette sous-tangente par a , nous en égalons la

valeur à celle de la sous-tangente (art. 183) d'une courbe polaire, et nous aurons, pour l'équation de la spirale hyperbolique,

$$u^2 \frac{dt}{du} = -a;$$

nous prenons la constante a négative parce qu'alors on a

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{a};$$

équation qui étant intégrée donne

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + C,$$

ou en remplaçant la quantité indéterminée C par une autre quantité $\frac{C'}{a}$, nous aurons

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + \frac{C'}{a};$$

prenant l'origine des t de manière que l'abscisse $t + C'$ soit égale à une nouvelle abscisse t , l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a},$$

ou plutôt

$$u = \frac{a}{t} \dots (117);$$

ce qui montre que lorsque $t = 0$, $u = \infty$; d'où il suit que le rayon vecteur, qui répond au point où t est nul, est une asymptote à la courbe.

194. L'équation (117) nous montre encore que le rayon vecteur est en raison inverse de l'abscisse; si nous faisons successivement $t = 2\pi$, $t = 4\pi$, $t = 6\pi$, etc., nous aurons cette suite de valeurs pour u , $\frac{a}{2\pi}$, $\frac{a}{4\pi}$, $\frac{a}{6\pi}$, etc.; ce qui nous ap-

prend qu'au bout de deux révolutions le rayon vecteur est réduit à moitié de ce qu'il était à la fin de la première, qu'au bout de trois révolutions il est réduit au tiers, et ainsi de suite.

195. L'équation de la spirale hyperbolique, comme celle de la spirale de Conon, sont des cas particuliers de l'équation $u = at^n$; car en faisant $n = 1$ et $a = \frac{1}{2\pi}$, on obtient la première, et en faisant $n = -1$, on obtient la seconde. Parmi les spirales déterminées par cette équation, on distingue encore la spirale parabolique, qui se trouve en faisant $n = 2$.

De la logarithmique.

196. La logarithmique est une courbe à coordonnées rectangulaires, dans laquelle l'abscisse est le logarithme de l'ordonnée; l'équation de cette courbe est donc

$$x = \log y,$$

d'où l'on tire

$$y = a^x,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a.$$

197. Pour discuter cette équation, faisons $x = 0$; nous trouverons $y = 1$; si l'on donne ensuite des valeurs croissantes et positives à x , y ira toujours en croissant; mais si l'on donne à x une valeur négative $-u$, on trouvera $y = a^{-u} = \frac{1}{a^u}$; et l'on voit que l'ordonnée diminuera d'autant plus qu'on s'écartera de l'origine, dans le sens des abscisses négatives, et qu'enfin la courbe ne pourrait atteindre le prolongement de l'axe des x qu'à l'infini, cas où

l'équation $y = \frac{1}{a^x}$ deviendrait $y = \frac{1}{a^\infty} = 0$; d'où l'on peut conclure que le prolongement de l'axe des x est une asymptote à la courbe.

198. Si, à partir de l'origine, on prend des abscisses Fig. 38 égales (fig. 38), $AP = u$, $AP' = -u$, on trouvera

$$PM = a^u, \quad P'M' = \frac{1}{a^u}; \quad \text{donc} \quad PM \times P'M' = 1.$$

199. La propriété la plus remarquable de cette courbe, est que la sous-tangente a une valeur constante. En effet, l'équation de la logarithmique étant différenciée, nous donne

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a, \quad \text{d'où nous tirons} \quad \frac{a^x dx}{dy} = \frac{1}{\log a}, \quad \text{ou} \dots$$

$y dx = \frac{1}{\log a} dy$. Or, le premier membre de cette équation exprime la sous-tangente de la courbe, art. 69; donc cette sous-tangente est constante.

De la cycloïde.

200. La cycloïde est une courbe qui est décrite par le Fig. 39. mouvement d'un point M (fig. 39), situé sur la circonférence d'un cercle qui roule sur une droite RC. Il est certain que dans ce mouvement de R en C, tous les points de l'arc RM viendront successivement s'appliquer sur la droite RA, jusqu'à ce que M, à son tour, s'y applique en A; par conséquent l'arc RM sera égal à la droite RA.

Tous les points par lesquels passe le point M, dans ce mouvement, étant, par hypothèse, sur la cycloïde, le point A sera aussi sur cette courbe. Prenons-le pour origine des abscisses, et abaissons la perpendiculaire ME sur le diamètre BR, et faisons $AP = x$, $PM = y$, $BR = 2a$,

arc $MR = z$, $ME = u$; nous aurons

$$AP = AR - PR,$$

ou

$$x = \text{arc } MR - ME,$$

ou

$$x = z - u \dots (118).$$

Nous chercherons d'abord à éliminer l'arc z de la manière suivante : nous différencierons l'équation précédente, ce qui nous donnera

$$dx = dz - du \dots (119).$$

Pour avoir la valeur de dz en fonction de u , nous observerons qu'entre u et z nous avons la relation

$$u = \sin z,$$

Cette équation étant différenciée, art. 42, on trouve

$$du = dz \frac{\cos z}{a},$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{adu}{\cos z};$$

il faut remplacer, dans cette équation, la valeur de $\cos z$ par celle que nous donne l'équation

$$\sin^2 z + \cos^2 z = a^2,$$

ou plutôt

$$u^2 + \cos^2 z = a^2,$$

et l'on obtient

$$dz = \frac{adu}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (119) il vient

$$dx = \frac{adu}{\sqrt{a^2 - u^2}} - du \dots (120);$$

il ne s'agit plus que d'exprimer u en fonction de y . Pour

Fig. 39. cet effet, soit O le centre du cercle générateur BMR (fig 39), nous avons

$$OE = \sqrt{MO^2 - ME^2},$$

ou

$$a - y = \sqrt{a^2 - u^2} \dots (121).$$

Élevant cette équation au carré, et réduisant, on en tire

$$u = \sqrt{2ay - y^2} \dots (122),$$

et en différenciant,

$$du = \frac{(a - y)dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \dots (123).$$

Les équations (121) et (123) transforment l'équation (120) en

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{2ay - y^2}} - \frac{(a - y)dy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

réduisant, on trouve

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}};$$

telle est l'équation de la cycloïde.

201. On peut encore obtenir l'équation de la cycloïde en fonction de l'arc, ainsi qu'il suit : l'équation $z = \sin z$ donne

$$z = \arcsin(u);$$

mettant pour u sa valeur tirée de l'équation (122), on a

$$z = \arcsin(\sin = \sqrt{2ay - y^2});$$

cette valeur et celle de u étant substituées dans l'équation (118), on a

$$x = \arcsin(\sin = \sqrt{2ay - y^2}) - \sqrt{2ay - y^2} (*) \dots (124);$$

(*) Le sinus ici correspond au rayon a ; celui des tables, ayant l'unité pour rayon, serait

$$\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a};$$

202. Pour discuter cette équation, on va prouver d'abord que y ne peut être négatif, ni plus grand que $2a$. En effet, si l'on fait $y = -y'$, l'expression $\text{arc}(\sin = \sqrt{2ay - y^2})$ devient $\text{arc}(\sin = \sqrt{-2ay' - y'^2})$, valeur imaginaire. En second lieu, si l'on fait $y = 2a + \delta$, l'expression. $\text{arc}(\sin = \sqrt{2ay - y^2})$ devient $\text{arc}(\sin = \sqrt{-2a\delta - \delta^2})$, valeur imaginaire; donc, si à une distance $EF = 2a$ de l'axe des x , on mène (fig. 40) AB parallèle à CD , la courbe sera Fig. 40: comprise entre les parallèles CD et AB .

La plus grande valeur que puisse avoir y est $2a$; car si l'on fait rouler le cercle générateur de A en C (fig. 41), le point M , qui était d'abord en A , s'élèvera successivement jusqu'à ce qu'il arrive en B , à l'extrémité du diamètre BD . Alors l'abscisse AD sera égale à DEB , c'est-à-dire à la demi-circonférence du cercle générateur. Fig. 41:

Ce résultat est conforme à celui qui nous est donné par l'équation (124), puisque si l'on fait $y = 2a$, on trouve $x = \text{arc}(\sin = 0)$; or, l'arc dont le sinus est nul doit être l'un des suivans : 0, DEB , $2DEB$, $3DEB$, etc., et l'on voit que, dans le cas présent, cet arc est DEB .

Le point M , parvenu en B , ayant donc décrit l'arc AB de cycloïde, si ce point continue à se mouvoir, il décrira un second arc BC , semblable au premier; enfin, si le cercle générateur continue toujours à rouler sur l'axe des abscisses, le point M engendrera une suite indéfinie d'arcs de cycloïde $CB'C''$ (fig. 42), $C''B''C'''$, etc. Le cercle générateur Fig. 42: pouvant aussi se mouvoir dans le sens de A vers A'' , le point M décrira encore une suite indéfinie d'arcs $AB'A'$, $A'B''A'''$, etc.

Si l'on voulait introduire ce sinus, il faudrait écrire

$$x = a \text{ arc} \left(\sin = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} \right) - \sqrt{2ay - y^2},$$

C'est l'assemblage de tous ces arcs qui, dans le sens le plus général, constitue la cycloïde.

203. La normale au point M, dont les coordonnées sont Fig. 43. x et y (fig. 43), est déterminée, art. 70, par cette formule :

$$\text{normale} = y \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1};$$

si dans cette formule nous mettons la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de l'équation de la cycloïde, nous trouverons

$$\text{normale} = y \sqrt{\frac{2ay - y^2}{y^2} + 1} = \sqrt{2ay}.$$

Fig. 43. Pour construire cette valeur, menons la corde MD (fig. 43), nous aurons

$$DE : MD :: MD : DB,$$

ou

$$y : MD :: MD : 2a;$$

donc

$$\text{la corde MD} = \sqrt{2ay};$$

et comme, par la propriété du cercle, l'angle BMD est droit, la corde MB sera perpendiculaire à l'extrémité de la normale MD; donc la corde MB prolongée est tangente au point M de la cycloïde; car on sait que la tangente et la normale forment entre elles un angle droit.

On pourrait donc construire la tangente au point M, en décrivant le demi-cercle générateur BMD, et en prolongeant la corde BM; mais pour n'avoir pas à construire ce cercle générateur à chaque point de la courbe, il suffira de construire le demi-cercle générateur sur la plus grande

Fig. 44. ordonnée BD (fig. 44) de la cycloïde; et ayant mené par le point donné M, la perpendiculaire ME sur BD, on tracera la corde BC; alors la parallèle MT' à cette corde sera la tangente demandée: c'est une suite de ce qui précède.

204. Pour avoir l'expression du rayon de courbure de la cycloïde, il faut, de l'équation de cette courbe, déduire les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, que nous substituerons dans l'expression du rayon de courbure, art. 150,

$$r = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et dans laquelle nous adoptons le signe négatif, parce que nous savons que la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x . L'équation de la cycloïde nous donne d'abord

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \dots (125).$$

Pour obtenir $\frac{d^2y}{dx^2}$ faisons $\frac{dy}{dx} = p$; nous aurons donc aussi

$$p = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1},$$

et en différenciant, art. 23, nous trouverons

$$dp = - \frac{\frac{2a}{y^2} dy}{2 \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}} = - \frac{ady}{y \sqrt{2ay - y^2}};$$

donc

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{a}{y \sqrt{2ay - y^2}};$$

multipliant cette équation par l'équation (125) nous obtenons, art. 24,

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{a}{y^2}, \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{a}{y^2};$$

au moyen de ces valeurs, on a enfin

$$\gamma = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ay^{\frac{3}{2}}}{y^2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}},$$

et en faisant passer y au numérateur,

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ay};$$

Fig. 45. dont le rayon de courbure MM' (fig. 45) de la cycloïde, est double de la normale MR .

205. On obtiendra l'équation de la développée en substituant les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans les formules, art. 149.

$$y - \beta = - \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x - \alpha = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = - (y - \beta) \frac{dy}{dx},$$

et l'on trouvera

$$y - \beta = \frac{2a}{\frac{y}{y^2}} = 2y, \quad x - \alpha = - 2\sqrt{2ay - y^2};$$

donc

$$\beta = -y, \quad \alpha = x + 2\sqrt{2ay - y^2}.$$

Fig. 46. ou (fig. 46),

$$QM' = MP, \quad \alpha = AP + 2ME;$$

et en observant que $AP + ME = AR = \text{arc } MR$, la dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$a = \text{arc } MR + ME \dots (126).$$

Prolongeons BR , et prenons $RL = BR = 2a$, et sur RL décrivons la demi-circonférence $RM'L$; cette demi-circonférence passera par le point M' , à cause des cordes égales $M'R$ et MR , et l'on aura

$$\text{arc } MR = \text{arc } M'R \quad \text{et} \quad ME = M'E';$$

substituant ces valeurs dans l'équation (126), on trouvera

$$a = \text{arc } M'R + M'E';$$

donc

$$a = \text{arc } M'R + \sqrt{2a\beta - \beta^2} \dots (127).$$

Telle est l'équation qui existe entre les coordonnées $AQ = a$ et $QM' = \beta$ d'un point M' de la développée. Prolongeons maintenant (fig. 46) l'ordonnée $D = 2a$ d'une quantité DA' encore égale à $2a$, et par le point A' menons la parallèle $A'D'$ à AD , et transportons l'origine A au point A' . Pour cet effet, soient $A'Q' = a'$, $Q'M' = \beta'$; nous ayons pour l'abscisse

Fig 46

$$A'Q' = AD - AQ,$$

ou

$$a' = \frac{1}{2} \text{ circonférence génératrice} - AQ,$$

ou

$$a' = \pi a - a;$$

à l'égard de l'ordonnée β' , nous avons

$$M'Q' = A'D - QM',$$

ou

$$\beta' = 2a - \beta;$$

on tire de ces équations

$$\alpha = \pi a - \alpha', \quad \beta = 2a - \beta';$$

au moyen de ces valeurs, l'équation (127) devient

$$\pi a - \alpha' = \text{arc } M'R + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2},$$

ou

$$\begin{aligned} \pi a - \alpha' &= \text{arc } RM'L - \text{arc } M'L + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2} \\ &= \pi a - \text{arc } M'L + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\alpha' = \text{arc } M'L - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}.$$

Cette équation est celle d'une cycloïde; donc la développée d'une cycloïde est une autre cycloïde.

206. On peut démontrer de la manière suivante, par la Fig. 46. synthèse, que la développée AA' (fig. 46) est une cycloïde. Nous avons

$$\text{arc } LM' + \text{arc } RM' = \pi a,$$

donc

$$\text{arc } LM' = \pi a - \text{arc } RM';$$

d'une autre part,

$$\text{arc } RM' = \text{arc } MR = AR, \quad \text{art. 199;}$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura

$$\text{arc } LM' = \pi a - AR = AD - AR;$$

ou

$$\text{arc } LM' = LA',$$

ce qui est la propriété de la cycloïde.

Du changement de la variable indépendante.

207. Lorsqu'une formule qui contient des coefficients différentiels est donnée, on peut les éliminer qu'à l'aide de l'équation de la courbe

à laquelle on veut appliquer cette formule; c'est ainsi que, lorsqu'on a la formule

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dy}{\frac{d^2y}{dx^2}} dx,$$

et qu'on demande ce qu'elle devient lorsque la courbe est une parabole, on tirera de l'équation $y = ax^2$ de la parabole, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qu'on substituera dans cette formule, et alors les coefficients différentiels disparaîtront. Si l'on regarde $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ comme des inconnues, il faut en général deux équations pour les éliminer d'une formule, et ces équations nous seront données en différenciant deux fois de suite l'équation de la courbe.

208. Lorsque, par les opérations de l'Algèbre, les dx ont cessé d'être sous les dy , comme dans la formule suivante,

$$\frac{y(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 - yd^2y} \dots (128),$$

la substitution s'opère en regardant dx , dy et d^2y comme des inconnues; et puisque pour les éliminer il faut en général un pareil nombre d'équations, il ne semble pas d'abord que l'élimination puisse s'effectuer, parce que la différenciation de l'équation de la courbe ne peut nous procurer que deux équations entre dx , dy et d^2y ; mais il faut remarquer que lorsqu'au moyen de ces deux équations on aura éliminé dy et d^2y , il se trouvera dans la formule un facteur commun dx^2 qui s'évanouira.

Par exemple, si la courbe est toujours une parabole représentée par $y = ax^2$, en différenciant deux fois de suite cette équation, on obtiendra

$$dy = 2ax dx, \quad d^2y = 2a dx^2;$$

ces valeurs étant substituées dans la formule (128), on obtiendra, après avoir supprimé le facteur commun dx^2 ,

$$\frac{y(1 + 4a^2x^2)}{1 + 4a^2x^2 - 2ay}.$$

209. La raison par laquelle dx^2 devient facteur commun est facile à saisir; car, lorsque dans une formule qui contenait primitivement $\frac{d^2y}{dx^2}$

et $\frac{dy}{dx}$, on a fait disparaître le dénominateur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, tous les termes, hors ceux en $\frac{d^2y}{dx^2}$ et en $\frac{dy}{dx}$, ont dû acquérir le facteur commun dx^2 ; alors les termes qui étaient affectés de $\frac{d^2y}{dx^2}$, ne contiennent plus dx , tandis que les termes qui étaient affectés de $\frac{dy}{dx}$ renferment dx au premier degré, car le produit de $\frac{dy}{dx}$ par dx^2 se réduit à $dydx$. Lorsqu'on différencie ensuite l'équation de la courbe, et qu'on obtient des résultats de la forme $dy = Mdx$, $d^2y = Ndx^2$, ces valeurs étant substituées dans les termes en d^2y et en $dydx$, les changeront, comme les autres termes en des produits de dx^2 .

210. Ce que nous disons d'une formule qui contient les différentielles des deux premiers ordres pouvant s'appliquer à celles dans lesquelles ces différentielles s'élèvent à des ordres supérieurs, il suit de là qu'en différenciant autant de fois qu'il sera nécessaire l'équation de la courbe, on pourra toujours chasser de la formule proposée les différentielles qui y sont contenues.

211. Il n'en serait pas de même si, outre les différentielles que nous venons de considérer, la formule contenait des termes en d^2x , en d^3x , etc.; car, supposons, par exemple, qu'il entrât dans cette formule les différentielles suivantes, dx , dy , d^2x , d^2y , et qu'en différenciant deux fois de suite l'équation représentée par $y = fx$, on en tirât ces équations :

$$F(x, y, dy, dx) = 0, \quad F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y) = 0,$$

on ne pourrait avec ces deux équations, éliminer que deux des trois différentielles dy , d^2x , d^2y , et l'on voit qu'il serait impossible de faire disparaître toutes les différentielles de la formule; il y a donc, dans ce cas, une condition tacite exprimée par la différentielle d^2x ; c'est que la variable x est elle-même considérée comme une fonction d'une troisième variable qui ne paraît pas dans la formule, et qu'on appelle la *variable indépendante*; cela deviendra manifeste, si l'on fait attention que l'équation $y = fx$ pourrait dériver du système des deux équations

$$x = Ft, \quad y = \phi t,$$

entre lesquelles on aurait éliminé t ; c'est ainsi que l'équation $y = a \frac{(x-c)^2}{b^2}$ revient au système des deux équations

$$x = bt + c, \quad y = at^2,$$

et l'on conçoit que x et y doivent varier en vertu de l'accroissement que t peut recevoir ; mais cette hypothèse, que x et y varient d'après l'accroissement donné à t , suppose qu'il y ait des relations entre x et t , et entre y et t ; l'une de ces relations est arbitraire , car l'équation, que nous représentons en général par $y = fx$, étant, par exemple, . . .

$y = a \frac{(x-c)^2}{b^2}$, si l'on établit entre t et x la relation arbitraire $x = \frac{t^2}{c^2}$,

cette valeur étant mise dans l'équation $y = a \frac{(x-c)^2}{b^2}$, la changera en

$y = a \frac{(t^2 - c^2)^2}{b^2 c^4}$, équation qui, étant combinée avec celle-ci, $x = \frac{t^2}{c^2}$,

doit reproduire par l'élimination, $y = a \frac{(x-c)^2}{b^2}$, seule condition à laquelle on doit avoir égard dans le choix de la variable t .

212. On peut donc déterminer arbitrairement la variable indépendante t . Par exemple, on prendra la corde, l'arc, l'abscisse ou l'ordonnée pour cette variable indépendante ; si t représente l'arc de la courbe, il faut que l'on ait $t = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; si t représente la corde, et que l'origine soit au sommet de la courbe, on aura $t = \sqrt{x^2 + y^2}$; enfin, t pourrait être l'abscisse ou l'ordonnée, et l'on aurait alors $t = x$, ou $t = y$.

213. Le choix de l'une de ces hypothèses ou de toute autre, devient indispensable pour que la formule qui contient des différentielles, puisse en être délivrée ; si nous ne le faisons pas toujours, c'est que nous supposons tacitement que la variable indépendante a été déterminée. Par exemple, dans le cas le plus ordinaire où une formule ne contient que les différentielles dx , dy , d^2y , d^3y , etc., l'hypothèse est que la variable indépendante t a été prise pour l'abscisse, car alors il en résulte

$$t = x, \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 0, \text{ etc. ;}$$

et l'on voit que la formule ne doit pas renfermer des différentielles secondes, troisièmes, etc., de x .

214. Pour rétablir la formule dans toute sa généralité, il faut, d'après ce qui précède, que x et y soient des fonctions d'une troisième variable indépendante t ; et que l'on ait, art. 24,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} ;$$

on tire de cette équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \dots (129);$$

prenant la différentielle seconde de y , et opérant sur le second membre comme on le fait pour les fractions, art. 19, on trouvera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Dans cette expression, dt a deux usages; l'un est d'indiquer quelle est la variable indépendante t , et l'autre d'y entrer comme signe d'Algèbre. Nous pouvons ne considérer dt que sous le second rapport, si nous ne perdons pas de vue que t est la variable indépendante; alors supprimant dt^2 comme facteur commun, l'expression précédente se simplifiera en écrivant

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3};$$

et en divisant par dx , elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}.$$

215. En opérant de même sur l'équation (129), on voit qu'en prenant t pour variable indépendante, le second membre de l'équation devient identique au premier; par conséquent, lorsqu'on prend t pour variable indépendante, on n'a qu'un seul changement à faire dans la formule qui contient les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, c'est de remplacer ce second coefficient différentiel par

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}.$$

Pour appliquer ces considérations au rayon de courbure qui, art. 186, est donné par l'équation

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

si l'on veut avoir la valeur de γ , dans le cas où t serait la variable indépendante, on changera cette équation en

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx dy^2 - dy^2 dx}{dx^3}};$$

et en observant que le numérateur revient à $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3}$, on aura

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy^2 - dy^2 dx} \dots (130).$$

216. Cette valeur de γ suppose donc que x et y soient des fonctions d'une troisième variable indépendante; mais si x devait être cette variable, c'est-à-dire si l'on avait $t = x$, on aurait $dx = 0$, et cette formule retomberait dans le cas ordinaire en redevenant

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx dy^2} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

217. Mais si, au lieu de prendre x pour la variable indépendante, on voulait que l'ordonnée fût cette variable indépendante, cette condition serait exprimée par l'équation $y = t$, et en différenciant deux fois de suite cette équation, on aurait

$$\frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

La première de ces équations nous dit seulement que y est la variable indépendante, ce qui ne change rien à la formule; mais la seconde nous montre que d^2y doit être nul, et alors l'équation (130) se réduit à

$$\gamma = - \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy dx^3}.$$

218. Il est à remarquer que lorsque x est la variable indépendante, et que l'on a par conséquent $dx = 0$, cette équation nous dit que dx est constant; d'où il suit qu'en général la variable, qui est regardée comme indépendante, a toujours une différentielle constante.

219. Enfin, si l'on prend l'arc pour variable indépendante, on aura

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

élevant au carré et divisant par dt^2 , cette équation nous donnera

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 1;$$

différenciant cette équation, nous regarderons, art. 218, dt comme constant, puisque t est la variable indépendante; et en opérant d'après la règle des exposans, nous trouverons

$$\frac{2dx dx}{dt^2} + \frac{2dy dy}{dt^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$dx dx^2 = -dy dy^2;$$

par conséquent, si l'on substitue la valeur de dx^2 ou celle de dy^2 dans l'équation (136), on aura dans le premier cas,

$$y = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2 + dy^2) dy^2} dx = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy^2} dx;$$

et dans le second cas,

$$x = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2 + dy^2) dx^2} dy = -\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2} dy.$$

220. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que les deux coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; mais si la formule devait contenir des coefficients différentiels d'ordres plus élevés, il faudrait, par des moyens analogues à ceux que nous avons employés, déterminer les valeurs de $\frac{d^3y}{dx^3}$ de $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc., qui se rapporteraient au cas où x et y sont des fonctions d'une troisième variable indépendante.

De la méthode des infiniment petits.

221. Les notions que nous avons de l'infini se réduisent à cette proposition : Une quantité n'est pas infinie lorsqu'elle

est susceptible d'augmentation. Par conséquent, si l'on a $x + a$, et que x devienne infini, il faut supprimer a , autrement ce serait supposer que x peut encore s'augmenter de a , ce qui est contre notre définition.

222. Cette proposition étant fondamentale, j'ai cherché à la démontrer d'une manière plus satisfaisante, comme il suit. Soit l'équation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = M \dots (131);$$

en la multipliant par le produit ax , on obtient

$$x + a = Max \dots (132).$$

Cela posé, supposons que x devienne infini, la fraction $\frac{1}{x}$ ayant atteint son dernier degré de décroissement, se réduit évidemment à zéro; alors l'équation (131) devient

$$M = \frac{1}{a}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (132), on obtient

$$x + a = x,$$

ce qui montre que quand x est infini $x + a$ se réduit à x .

223. La quantité a , à l'égard de laquelle x est infini, est ce qu'on appelle un *infinitement petit*, par rapport à x .

224. Comme nous ne considérons ici que les rapports des quantités, la démonstration précédente a lieu lors même que x a une valeur finie, pourvu seulement que x soit infinitement petit par rapport à x . La théorie des fractions va nous servir encore à rendre sensible cette vérité. En effet, si l'on compare la quantité finie b à la fraction

$\frac{b}{z}$, il est certain que plus le dénominateur z augmentera, plus la fraction diminuera; de sorte que quand z deviendra infini, cette fraction deviendra absolument nulle; et, comme telle, devra être supprimée devant b , qui alors sera infini à l'égard de $\frac{b}{z}$.

225. Quoique deux quantités soient infiniment petites, il ne s'ensuit pas que leur rapport soit nul; car

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} :: a : b.$$

On sent d'ailleurs que deux quantités infiniment petites peuvent se contenir comme deux quantités très grandes; ainsi, en représentant deux quantités infiniment petites par dx et par dy , il suit de là que leur rapport $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nul : résultat conforme à celui que nous avons obtenu par la considération des limites.

226. Lorsqu'une quantité x est infiniment petite, par rapport à une grandeur finie a , le carré x^2 est infiniment petit par rapport à x . En effet, la proportion

$$1 : x :: x : x^2$$

nous prouve que x^2 est renfermé dans x autant de fois que x l'est dans l'unité, c'est-à-dire un nombre infini de fois. On démontrerait de même, à l'aide de la proportion $x : x^2 :: x^2 : x^3$, que x^3 étant infiniment petit par rapport à x , le terme x^3 doit être infiniment petit par rapport à x^2 ; c'est par cette raison qu'on a divisé les infiniment petits en différens ordres : ainsi, dans les exemples précédens, x est un infiniment petit du premier ordre, x^2 est un infiniment petit du second ordre, x^3 est un infiniment petit du troisième ordre; ainsi de suite.

227. Observons que si x est infiniment petit par rapport à a , il en sera de même de x multiplié par une quantité finie b . En effet, x pouvant être considéré comme une fraction dont le dénominateur serait infini, on peut représenter x par $\frac{c}{\infty}$; or, que l'on ait $\frac{c}{\infty}$ ou $\frac{bc}{\infty}$, ces quantités n'en sont pas moins nulles par rapport à a .

228. De même qu'un infiniment petit du premier ordre doit être supprimé lorsqu'il est à côté d'une quantité finie, qu'il ne peut augmenter, on doit effacer un infiniment petit du second ordre, qui serait à côté d'un infiniment petit du premier ordre; ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a cette expression

$$a + by + cy^2 + dy^3,$$

et que y soit un infiniment petit du premier ordre, cy^2 en sera un du second, et dy^3 en sera un du troisième; il faut donc effacer dy^3 , parce que dy^3 ne peut augmenter cy^2 ; et comme cy^2 ne peut augmenter by , on l'effacera à son tour; enfin, on effacera aussi by , puisque cet infiniment petit du premier ordre ne peut augmenter la quantité finie a , et il restera a .

229. Deux quantités infiniment petites x et y , donnent pour leur produit un infiniment petit du second ordre. En effet, du produit xy je tire la proportion

$$1 : y :: x : xy,$$

ce qui m'apprend que puisque y est infiniment petit par rapport à 1, xy sera infiniment petit par rapport à x , c'est-à-dire sera un infiniment petit du second ordre.

230. On prouverait de même que le produit de trois infiniment petits du premier ordre donne un infiniment petit du troisième ordre.

231. Nous pouvons maintenant expliquer la théorie de la différenciation, d'après la méthode des infiniment petits. Pour cet effet, si on suppose que dans une fonction de x la variable x prenne un accroissement infiniment petit, représenté par dx , en sorte que x devienne $x + dx$, la différence du nouvel état au premier, sera la différentielle de cette fonction.

232. Par exemple, pour trouver la différentielle de ax , cette fonction devenant $a(x + dx) = ax + adx$, si on en retranche ax , il restera adx pour la différentielle.

233. Cherchons encore la différentielle de ax^3 ; il faut donc de $a(x + dx)^3$ retrancher ax^3 ; développant et réduisant, on trouve d'abord $3ax^2dx + 3axdx^2 + adx^3$. Cela posé, adx^3 étant un infiniment petit du troisième ordre, ne peut augmenter $3axdx^2$, par conséquent, on effacera adx^3 ; de même $3axdx^2$, qui est un infiniment petit du second ordre, doit être supprimé, parce que $3ax^2dx$ est un infiniment petit du premier ordre; et il restera $3ax^2dx$ pour la différentielle.

234. On différenciera, d'après le même principe, toute autre fonction de x , en ayant le soin de supprimer les infiniment petits des ordres supérieurs, ce qui se réduit à ne conserver que le premier terme du développement, ainsi qu'on le fait par la méthode des limites.

Par exemple, pour trouver la différentielle de fx , au lieu d'écrire

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = A + Bh + Ch^2 + \text{etc.},$$

qui, dans le cas de la limite, donne $\frac{dfx}{dx} dx = Adx$ pour la différentielle, on aurait

$$f(x + dx) = fx + Adx + Bdx^2 + Cdx^3 + \text{etc.};$$

retranchant la fonction primitive, il resterait

$$A dx + B dx^2 + C dx^3 + \text{etc.};$$

et comme on devrait supprimer les infiniment petits des ordres supérieurs, on ne conserverait que le terme $A dx$, qui serait la différentielle cherchée.

235. Pour trouver la différentielle du produit de deux variables, y, z , on supposera que quand x devient $x + dx$, y devienne $y + dy$, et que z devienne $z + dz$. Le produit yz se convertira donc alors en $(y + dy)(z + dz)$; développant et retranchant yz , il restera $yz + zdy + ydz$. Le dernier terme de ce résultat étant un infiniment petit du second ordre, devra s'effacer, et l'on aura, pour la différentielle de yz , l'expression $yz + zdy$.

236. On déduira ensuite de cette dernière différentielle, celle du produit d'un plus grand nombre de variables, et ensuite celle de x^n , par les procédés que nous avons suivis lorsque nous avons employé la méthode des limites.

237. La différentielle de a^x s'obtiendra aussi très facilement, lorsque l'on aura le développement de a^{x+dx} , et ce développement se trouvera comme celui de a^{x+h} , article 36; on cherchera ensuite la valeur de $a^{x+dx} - a^x$, et, ne conservant que le premier terme, on rejettera les autres comme des infiniment petits d'ordres inférieurs à celui du terme que l'on conserve. De la différentielle de a^x on déduira ensuite, comme nous l'avons fait, celle de $\log x$.

238. A l'égard de la différentielle de $\sin x$, on a

$$\sin(x + dx) - \sin x = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x - \sin x,$$

l'arc x étant infiniment petit,

$$\cos dx = 1, \quad \text{et} \quad \sin dx = dx;$$

au moyen de ces valeurs, on trouve

$$d, \sin x = dx \cos x.$$

239. Le problème des tangentes a donné en quelque sorte naissance au Calcul différentiel. Voici de quelle manière on résout ce problème par la méthode des infiniment petits.

Fig. 47. Soient PM et $P'M'$ (fig. 47), deux ordonnées infiniment proches, et MO une parallèle à l'axe des x ; la tangente MT pourra être considérée comme le prolongement de l'élément MM' de la courbe, parce que cet élément étant très petit, est censé être en ligne droite. Nommons AP, x ; PM, y ; l'accroissement de x sera $PP' = dx$, et celui de y sera $M'O = dy$. Le triangle infiniment petit $MM'O$ étant semblable au triangle MPT , on a

$$M'O : MO :: MP : PT,$$

ou

$$dy : dx :: y : PT;$$

donc

$$PT = y \frac{dx}{dy}.$$

On trouvera ensuite la normale, la tangente, et les équations de ces lignes, comme dans les art. 70 et 71.

240. Pour avoir la différentielle d'un arc, on regardera l'arc compris entre les ordonnées PM et $P'M'$, infiniment proches, comme une ligne droite; et alors, en nommant s l'arc total, MM' sera ds , et le triangle rectangle $MM'O$ donnera

$$MM'^2 = MO^2 + M'O^2,$$

ou

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

tirant la racine carrée,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

241. La différentielle de l'arc d'une courbe dont les coordonnées sont polaires, se trouve aussi très facilement par la considération des infiniment

Fig. 82. petits. En effet, soient (fig. 82) RR' et MN , deux arcs de cercle décrits

l'un avec le rayon 1 et l'autre avec le rayon u , dans l'angle infiniment petit $M'AM$, formé par deux rayons vecteurs; le triangle $NM'M$ pourra Fig. 82. être regardé comme rectiligne et rectangle en N ; on aura donc

$$MM' = \sqrt{NM'^2 + NM^2};$$

et en observant que $M'N = du$, et que MN est égal à $u dt$, en vertu de la proportion

$$1 : dt :: u : MN,$$

nous pourrions remplacer NM' et MN par leurs valeurs; et, en mettant ds à la place de MM' , nous aurons

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2}.$$

Le même triangle MMN , comparé au triangle $M'AT$, nous fera obtenir la sous-tangente d'une courbe polaire par la proportion

$$M'N : MN :: AM^2 : AT,$$

ou, en remplaçant AM^2 par AM , qui n'en diffère que d'un infiniment petit,

$$du : u dt :: u : AT;$$

d'où nous tirons

$$AT = u^2 \frac{dt}{du};$$

De la méthode de Lagrange pour démontrer les principes du Calcul différentiel, sans la considération des limites, des infiniment petits, ou de toute quantité évanouissante.

242. Nous avons vu de quelle utilité était le théorème de Taylor lorsqu'on voulait développer des fonctions en séries. Lagrange ayant senti que les principes de la différenciation étaient renfermés dans ce théorème, parvint à le démontrer sans faire usage du Calcul différentiel, par un procédé que nous allons modifier de la manière suivante :

Soit $y = f(x + h)$; par la nature de cette fonction, il faut que lorsqu'on fait $h = 0$, $f(x + h)$ se réduise à fx ; c'est ce qui aura lieu si la partie qui contient h dans cette

équation, est un multiple de h . Représentons-la par Ph ; nous aurons donc

$$f(x+h) = fx + Ph;$$

P pouvant être une fonction de h , si nous appelons p ce que devient P lorsque $h = 0$, et Qh la partie qui dépend de h , nous aurons encore $P = p + Qh$; en continuant ce raisonnement on aura cette suite d'équations

$$\begin{aligned} y &= fx + Ph, \\ P &= p + Qh, \\ Q &= q + Rh, \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Mettant la valeur de P , donnée par la deuxième équation, dans la première, il viendra

$$y = fx + ph + Qh^2;$$

mettant dans ce résultat la valeur de Q , donnée par la troisième équation, on aura

$$y = fx + ph + qh^2 + Rh^3;$$

en continuant ainsi, et en mettant $f(x+h)$ à la place de y , on aura en général

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \text{etc.} \dots (133).$$

243. L'expression $f(x+h)$ représente, en général, la fonction qui n'est pas encore réduite en série; si dans cette fonction on change x en $x+i$, on aura le même résultat que si l'on eût changé h en $h+i$. En effet, cette fonction ne pouvant renfermer x sans que cette variable ne soit suivie immédiatement de h , un terme tel que $A(x+h)^m$, par exemple, lorsqu'on aura changé x en $x+i$, deviendra $A(x+i+h)^m$, quantité qui est la même que $A(x+h+i)^m$ qui résulterait de la substitution de $h+i$ à la place de h ,

dans la fonction $A(x + h)^m$; ce que nous disons de ce terme devant s'appliquer à tous les autres, il s'ensuit que, dans les deux hypothèses, le premier membre de l'équation (133) donnera lieu à des résultats identiques; d'où il suit que le développement $fx + ph + qh^2 + \text{etc.}$, donnera le même résultat en remplaçant x par $x + i$, ou h par $h + i$.

244. En substituant d'abord $h + i$ à h dans $fx + ph + qh^2 + \text{etc.}$, on aura

$$fx + p(h + i) + q(h + i)^2 + r(h + i)^3 + \text{etc.} \dots (134);$$

et en écrivant seulement les deux premiers termes de chacun de ces binômes, il nous viendra

$$fx + ph + pi + qh^2 + 2qhi + rh^3 + 3rh^2i + \text{etc.} \dots (135).$$

Pour obtenir ensuite le résultat de la substitution de x à $x + i$, dans l'expression $fx + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.}$, observons que dans cette série, h étant en évidence, cet accroissement n'entre pas dans fx et dans les coefficients p, q, r, s , etc., quantités qui ne pouvant donc renfermer que x , en doivent être regardées comme des fonctions; et puisque l'équation (133) a lieu pour toute fonction de x , la substitution de $x + i$ à la place de x changera

$$fx \text{ en } fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.},$$

$$p \text{ en } p + p'i + p''i^2 + p'''i^3 + p^{iv}i^4 + \text{etc.},$$

$$q \text{ en } q + q'i + q''i^2 + q'''i^3 + q^{iv}i^4 + \text{etc.},$$

$$r \text{ en } r + r'i + r''i^2 + r'''i^3 + r^{iv}i^4 + \text{etc.},$$

$$s \text{ en } s + s'i + s''i^2 + s'''i^3 + s^{iv}i^4 + \text{etc.},$$

$$\text{etc. etc. etc. etc. etc. etc.}$$

Il n'est pas besoin de prévenir que par les lettres accentuées, nous représentons les coefficients des différentes puissances de i dans ces développemens.

En substituant ces valeurs de fx , de p , de q , de r , de s , etc., dans la suite $fx + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.}$, nous obtiendrons

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.} + (p + p'i + p''i^2 + \text{etc.})h + (q + q'i + q''i^2 + \text{etc.})h^2 + (r + r'i + r''i^2 + \text{etc.})h^3 \text{etc....} \quad (136).$$

245. Ce développement devant être identique (art. 243) à celui qui est désigné par 135, il faut que dans ces développemens, les termes qui contiennent les mêmes puissances de h soient égaux (*note seconde*); par conséquent, si nous comparons les termes affectés de hi , de h^2i , de h^3i , etc., de ces développemens, nous trouverons.

$$p' = 2q, \quad q' = 3r, \quad r' = 4s, \text{etc....} \quad (137).$$

246. Nous avons vu, art. 244, que p était en général une fonction de x ; représentant donc p par $f'x$, et nommant $f''x$ le terme qui multipliera le coefficient de h dans le développement de $f'(x+h)$; nommant de même $f'''x$ le coefficient de h dans le développement de $f''(x+h)$, et ainsi de suite, nous aurons ces équations

$$\left. \begin{array}{l} f(x+h) = fx + hf'x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.} \\ f'(x+h) = f'x + hf''x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.} \\ f''(x+h) = f''x + hf'''x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.} \\ \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{array} \right\} \quad (138).$$

247. Par hypothèse, nous avons, art. 246, $p = f'x$; donc, si dans cette équation on fait $x = x + h$, on aura

$$p + p'h + p''h^2 + p'''h^3 + \text{etc.} = f'(x+h) \dots (139);$$

mettant dans cette équation la valeur de $f'(x+h)$, donnée par la seconde des équations (138), nous obtiendrons

$$p + p'h + p''h^2 + \text{etc.} = f'x + hf''x + \text{termes en } h^2 \text{ en } h^3, \text{ etc.}$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit h , il faut que les termes des mêmes puissances de h soient égaux; donc

$$p' = f''x;$$

cette valeur de p' changera la première des équations (137) en $f''x = 2q$; d'où nous tirerons

$$q = \frac{1}{2} f''x;$$

si dans cette équation nous changeons x en $x+h$, il viendra

$$q + q'h + q''h^2 + \text{etc.} = \frac{1}{2} f''(x+h);$$

mettant à la place de $f''(x+h)$ son développement donné par la troisième des équations (138), nous aurons

$$q + q'h + q''h^2 + \text{etc.} = \frac{1}{2} (f''x + hf'''x + \text{termes en } h^2 \text{ en } h^3, \text{etc.});$$

comparant les termes qui multiplient la première puissance de h , nous aurons $q' = \frac{1}{2} f'''x$, valeur qui étant mise dans la seconde des équations (137), la changera en $\frac{1}{2} f'''x = 3r$, d'où l'on tirera

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} f'''x;$$

en continuant ainsi, nous trouverons successivement tous les autres coefficients de l'équation (133); substituant dans cette équation les valeurs de p , de q , de r , etc., nous aurons

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{2.3} f'''x + \text{etc.} \quad (140).$$

248. Si l'on considère maintenant la première des équations (138), on verra que $f'x$ étant le coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$, est ce qu'on désigne par $\frac{d.fx}{dx}$ ou par $\frac{dy}{dx}$; de même, en considérant la seconde des équations (138), on reconnaîtra que le coefficient $f''x$ de la première puissance de h , dans le développement de

$f'(x+h)$, doit être représenté par $\frac{df'x}{dx}$, c'est-à-dire par

$d.\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, et ainsi de suite; par conséquent, en mettant ces valeurs de fx , de $f'x$, de $f''x$, etc. dans l'équation (140), on trouvera

$$f(x+h) = fx + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \dots (141).$$

249. C'est ainsi qu'on parvient à la formule de Taylor, sans faire usage du Calcul différentiel. L'expression $\frac{dy}{dx}$, qui entre dans cette formule, est le signe de l'opération par laquelle on obtient le coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$; dès que ce coefficient est trouvé, les expressions $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., nous indiquent que la même opération répétée, nous fera connaître les coefficients des autres puissances de h ; de sorte que nous n'avons besoin que de connaître, par des moyens tirés de l'Algèbre, ce que doit être $\frac{dy}{dx}$ pour chaque fonction. Par exemple, si l'on demandait

quel est $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction x^m , on développerait $(x+h)^m$ par la formule du binôme, qui donnerait $x^m + mx^{m-1}h + \text{etc.}$; et comme $\frac{dy}{dx}$ devrait indiquer le coefficient de la première puissance de h , dans ce développement, on aurait.....

$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$. Ainsi, tout se réduit à pouvoir trouver, par des procédés analytiques, le développement des différentes sortes de fonctions que l'Algèbre peut présenter; ces procédés ne sont pas différens de ceux que nous avons fait connaître pour développer les diverses fonctions qui, par leur combinaison, donnent toutes les autres; c'est ainsi que nous avons donné les développemens de a^{x+h} , de $\log(x+h)$, de $\cos(x+h)$, etc.

250. Voilà donc une troisième méthode, d'après laquelle les principes du Calcul différentiel se trouvent démontrés d'une manière indépendante de toute considération de limites, d'infiniment petits, ou de quantités évanouissantes ; mais cette méthode ne peut néanmoins exclure celle des limites, parce que lorsqu'on en vient aux applications, et qu'on veut, par exemple, déterminer les volumes, ou les surfaces, rectifier les courbes, ou obtenir les expressions des sous-tangentes, des sous-normales, etc., on est toujours obligé de recourir aux limites ou aux infiniment petits.

251. En considérant les développemens des diverses fonctions $(x+h)^n$, a^{x+h} , $\log(x+h)$, $\sin(x+h)$, etc., que l'Algèbre nous offre ; comme ces fonctions sont en nombre très limité, il est facile de reconnaître que, dans leurs développemens, le coefficient de la première puissance de h n'est ni nul, ni infini, du moins tant que x conserve sa valeur indéterminée ; c'est d'ailleurs ce qui résulte de la démonstration précédente. En effet, supposons qu'on eût $p=0$ dans l'équation

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + \text{etc.},$$

il arriverait deux cas : ou la valeur de x , que renferme p , devrait être donnée par une équation identique, ou par une équation qui ne le serait pas ; dans ce dernier cas, $p=0$ représenterait une équation d'un certain degré, et cette équation ne donnerait qu'un nombre limité de valeurs de x , ce qui serait contre l'hypothèse, qui admet pour x une valeur quelconque ; mais si $p=0$, c'est-à-dire si $f'x=0$ était une équation identique en x (*), faisant $x=x+h$, on aurait encore $f'(x+h)=0$; et comme h entrerait par-

(*) Le cas où p ne contient pas x est compris dans celui-ci ; car si la valeur de p , qui est nulle, est représentée par $a-a$, on peut la considérer comme $a-x-(a-x)$.

tout où entre x , cette équation, considérée par rapport à h , serait encore identiquement nulle, ou, en d'autres termes, cette équation aurait lieu quel que soit h ; il en serait donc de même de son développement qui, d'après l'équation (139), est

$$p + p'h + p''h^2 + p'''h^3 + \text{etc.} = 0;$$

mais lorsqu'une équation de ce genre est nulle, indépendamment de h , il faut que les coefficients des différentes puissances de h soient nuls séparément (*note seconde*), et que, par conséquent, l'on ait

$$p' = 0, \quad p'' = 0, \quad p''' = 0, \quad \text{etc.}$$

En substituant ces valeurs dans les équations

$$p' = 2q, \quad p'' = 3r, \quad p''' = 4s, \quad \text{etc.},$$

qui résultent de l'identité des termes affectés des mêmes puissances de h , de i^2h , de i^3h , etc., dans les suites 134 et 136, on obtiendrait

$$q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad \text{etc.};$$

et, comme en outre $p = 0$, l'équation (133) se réduirait à

$$f(x + h) = fx;$$

il faudrait donc que $x + h$, mis à la place de x , ne changeât pas la fonction, ce qui exigerait que cette fonction fût identique ou constante; car on sait que si fx était, par exemple, de cette forme $x^2 - x^2$, ou de celle-ci, $c + x^2 - x^2$, la substitution de $x + h$ à la place de x donnerait toujours le même résultat, et l'on voit que, dans le premier cas, la fonction serait identique, et dans le second, se réduirait à une constante c . Il suit de ce qui précède, que le coefficient de la première puissance de h ne peut être nul dans le développement général de $f(x + h)$.

Il ne serait pas moins absurde de supposer ce coefficient infini, car le second membre de l'équation (133) devenant infini, le premier membre le serait aussi, c'est-à-dire qu'on

aurait $f(x+h) = \infty$; et comme $f(x+h)$ est composé en $x+h$, comme fx l'est en x , le terme qui, dans $f(x+h)$, rendrait cette expression infinie, devrait rendre aussi infini fx . Par exemple, si $f(x+h)$ renfermait un terme tel que

$\frac{A}{(x+h)-(x+h)}$, qui est infini, il est évident qu'on devrait avoir dans fx , le terme $\frac{A}{x-x}$, qui serait aussi infini.

Il suit de là que la fonction proposée serait infinie, ce que nous ne supposons pas.

252. Les expressions $f'x$, $f''x$, $f'''x$, etc., sont ce que Lagrange appelle la *fonction prime*, la *fonction seconde*, la *fonction tierce*, etc., de fx , et en général, en sont les fonctions dérivées. Lagrange indique aussi les fonctions dérivées d'une autre manière, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par y' , $\frac{d^2y}{dx^2}$ par y'' , $\frac{d^3y}{dx^3}$ par y''' , et ainsi de suite.

Des cas où la formule de Taylor est en défaut.

253. En général, lorsque dans une fonction de x on met $x+h$ à la place de x , la forme de la fonction reste la même, puisque $x+h$ entre partout où était x ; ainsi, lorsque fx renferme un radical, $f(x+h)$ doit aussi le renfermer: par exemple, si l'on a

$$fx = bx^a + \frac{a}{\sqrt{x}},$$

le même radical se trouvera dans l'expression

$$f(x+h) = b(x+h)^a + \frac{a}{\sqrt{x+h}}.$$

254. Il n'en serait pas toujours de même, si l'on donnait une valeur particulière à x (je veux dire déterminée): par exemple, si $\sqrt[3]{x-a}$ entraînait dans fx , il faudrait que $f(x+h)$ contiât le terme

$$\sqrt[3]{x+h-a};$$

or, l'hypothèse de $x = a$ serait évanouir $\sqrt[3]{x-a}$ qui se trouve dans

fx , tandis que la même hypothèse réduirait le terme $\sqrt[3]{x-a+h}$, qui entre dans $f(x+h)$, à $\sqrt[3]{h} = h^{\frac{1}{3}}$: le développement de $f(x+h)$ contiendrait donc alors un radical qui n'existerait pas dans fx , et ne pourrait se développer suivant les puissances entières de h .

Cette impossibilité se manifesterait par les valeurs infinies que prendraient les coefficients différentiels : par exemple, si l'on avait l'équation

$$y = \sqrt[3]{x-a},$$

on trouverait, en la différenciant,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (x-a)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}},$$

et l'on voit que la valeur de ce coefficient différentiel devient infinie, lorsqu'on fait $x=a$.

255. Soit, en général,

$$f(a+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots + Mh^n + Nh^{n+\frac{1}{2}} + \text{etc.} \dots \quad (142).$$

Le développement qu'on serait censé obtenir en faisant $x=a$, et dans lequel $n + \frac{1}{2}$ représente une quantité qui tombe entre n et $n+1$; on va démontrer que le coefficient différentiel de l'ordre $n+1$ est infini. Pour cela, en regardant a comme une variable, nous savons, art. 53 et 54, que l'on a

$$\frac{df(a+h)}{da} = \frac{df(a+h)}{dh}, \quad \frac{d^2f(a+h)}{da^2} = \frac{d^2f(a+h)}{dh^2}, \text{ etc.} \quad (143).$$

Différencions successivement par rapport à h , l'équation (142), et représentons, pour abréger, par M' , N' , M'' , N'' , etc., ce que deviennent alors les coefficients M et N ; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{df(a+h)}{dh} &= B + 2Ch + 3Dh^2 + \dots + M'h^{n-1} + N'h^{n+\frac{1}{2}-1} + \text{etc.}, \\ \frac{d^2f(a+h)}{dh^2} &= 2C + 2.3 Dh + \dots + M''h^{n-2} + N''h^{n+\frac{1}{2}-2} + \text{etc.}, \\ \text{etc.} & \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

remplaçant les premiers membres de ces dernières équations par leurs

Il résulte de ce théorème, que lorsqu'on fait $x = a$, dans le développement de $f(x+h)$, s'il existe une puissance fractionnaire de h dans ce développement, et qu'elle soit comprise entre les termes affectés de h^n et de h^{n+1} , on ne pourra déterminer les termes de la série de Taylor, que jusqu'à l'ordre n inclusivement : tous les autres termes deviendront infinis.

256. Une fonction de x représentée par fx étant donnée, si l'on veut déterminer le développement de $f(x+h)$, dans l'hypothèse de $x = a$, il faudra, comme on le sait, calculer les termes de la suite,

$$fx + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

mais si en faisant ce calcul on trouve que l'un des coefficients différentiels devienne infini dans l'hypothèse de $x = a$, on ne cherchera plus à obtenir le développement de $f(x+h)$ par la série de Taylor; mais voici le procédé qu'il faudra employer. On mettra $x+h$ à la place de x , dans fx ; alors le terme qui contient $x-a$ au dénominateur, contiendra $x-a+h$, et ne deviendra plus infini lorsqu'on fera $x = a$, mais donnera lieu à un terme affecté d'une puissance fractionnaire de h .

257. Soit, par exemple,

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2};$$

en différenciant, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = 2(a-x) + \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

substituant ces valeurs et celles de $\frac{d^2y}{dx^2}$, de $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., dans la formule de Taylor, art. 55, on obtient.

$$f(x+h) = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2} + \left[2(a-x) + \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right] h + \text{etc.}$$

Or, quand $x = a$, le terme multiplié par h devient infini; donc ce développement n'est plus possible.

Dans ce cas, d'après la règle précédente, on mettra $x+h$ à la place de x dans l'équation.

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2},$$

et l'on trouvera

$$f(x+h) = 2ax + 2ah - x^2 - 2xh - h^2 + a\sqrt{x^2 + 2xh + h^2 - a^2},$$

équation qui, dans l'hypothèse de $x = a$, devient

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{2ah+h^2},$$

ou

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h}\sqrt{2a+h};$$

développant par la formule du binôme, et représentant, pour abrégé, par A, B, C , etc., les coefficients donnés par cette formule, on a

$$\sqrt{2a+h} = (2a+h)^{\frac{1}{2}} = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{etc.};$$

substituant, on trouve

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + aA\sqrt{h} + aBh\sqrt{h} + aCh^2\sqrt{h} + \text{etc.}$$

On voit, par cet exemple, qu'en mettant $x+h$, dans la fonction, et faisant $x=a$, on peut introduire une ou plusieurs puissances fractionnaires de h ; on développe ensuite séparément les termes qui sont susceptibles de l'être, soit par la formule du binôme, soit autrement, et on substitue ces termes dans la valeur de $f(a+h)$, ce qui en donne le développement.

258. Lorsque x reste indéterminé, Lagrange a démontré que le développement de $f(x+h)$ ne pouvait contenir des termes affectés d'une puissance fractionnaire de h . En effet, supposons que l'on eût

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + \dots + K\sqrt[3]{h};$$

comme $K\sqrt[3]{h}$ est susceptible de trois valeurs, M, N, P , nous aurions ces trois développements de $f(x+h)$,

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + \dots + M,$$

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + \dots + N,$$

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + \dots + P.$$

Or, fx devant renfermer les mêmes radicaux que $f(x+h)$, art. 253, il faudrait que fx eût aussi trois valeurs différentes, Q, R, S ; en substituant successivement ces valeurs à la place de fx , on trouverait donc

$$f(x+h) = Q + ph + qh^2 + \dots + M,$$

$$f(x+h) = Q + ph + qh^2 + \dots + N,$$

$$f(x+h) = Q + ph + qh^2 + \dots + P,$$

$$f(x+h) = R + ph + qh^2 + \dots + M,$$

$$f(x+h) = R + ph + qh^2 + \dots + N,$$

$$f(x+h) = R + ph + qh^2 + \dots + P,$$

$$f(x+h) = S + ph + qh^2 + \dots + M,$$

$$f(x+h) = S + ph + qh^2 + \dots + N,$$

$$f(x+h) = S + ph + qh^2 + \dots + P.$$

de sorte que l'expression $f(x+h)$ étant développée, aurait neuf valeurs différentes, tandis que non développée, elle n'en pourrait avoir qu'autant que fx en comporte, et par conséquent trois dans l'hypothèse actuelle; ainsi on ne peut supposer que le développement de $f(x+h)$ contienne une puissance fractionnaire de h , sans tomber dans une contradiction.

259. Il est facile aussi de démontrer que $f(x+h)$ ne peut contenir, dans son développement, un terme affecté d'une puissance négative de h ; car s'il contenait un terme tel que Mh^{-n} , on aurait :

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 \dots + \frac{M}{h^n};$$

or, en faisant $h = 0$, le premier membre se change en fx , et le second, au lieu de se réduire à fx , devient infini, à cause du terme $\frac{M}{h^n}$ qu'il renferme.

260. Il en serait de même si le développement contenait un terme affecté du logarithme de h ; car si l'on avait, par exemple, un terme tel que $A \log h$, ce terme, lorsqu'on ferait $h = 0$, deviendrait $A \log 0$; or, le logarithme de 0 étant l'infini négatif, le terme $A \log h$ serait alors infini; d'où il suit que fx devrait l'être aussi, ce qui est contre l'hypothèse.

FIN DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

ÉLÉMENTS

DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

CALCUL INTÉGRAL.

De l'intégration des différentielles monomes.

261. LE Calcul intégral a pour objet de trouver la fonction qui, étant différenciée, a dû produire une différentielle donnée. Pour commencer par le cas le plus simple, nous allons chercher à intégrer l'expression $x^m dx$: dans cette vue, nous différencierons l'expression x^{m+1} , et nous trouverons

$$d. x^{m+1} = (m+1) x^m dx,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{d. x^{m+1}}{m+1} = x^m dx;$$

et comme la constante $m+1$ n'influe pas sur la différenciation, nous pourrons écrire ainsi l'équation précédente :

$$d. \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx;$$

par conséquent, la quantité qui, par la différenciation, a

donné $x^m dx$, est $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. Pour indiquer cette opération, nous mettrons, avant la différentielle, la caractéristique $\int$, qui signifie *somme* ou *intégrale* (*), de sorte que nous écrirons

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

262. Concluons cette règle générale : *pour intégrer $x^m dx$ il faut augmenter l'exposant d'une unité, et diviser par cet exposant ainsi augmenté et par la différentielle.*

263. Soit, par exemple, $\frac{adx}{x^3}$; nous aurons donc

$$\int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-3+1}}{-3+1} = \frac{ax^{-2}}{-2} = -\frac{a}{2x^2};$$

on trouvera de même que

$$\int dx \sqrt[3]{x} = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}.$$

264. Observons que lorsque nous différencions $a+x^m$, nous trouvons $mx^{m-1}dx$, comme si nous n'eussions différencié que x^m ; par conséquent il faudra, en intégrant, ajouter une

(*) Ce mot *somme*, pour désigner l'intégrale, a été introduit par les anciens géomètres, parce que, d'après la méthode des infiniment petits, ils considéraient une fonction y comme une somme d'accroissemens infiniment petits.

Fig. 48. Par exemple, on voit que l'ordonnée étant MP (fig. 48), on a

$$MP = ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + a^{iv}M,$$

c'est-à-dire que y est égal à la somme des accroissemens infiniment petits, représentés chacun par dy .

constante à l'intégrale. Ainsi, dans les exemples précédents, nous écrirons

$$\int \frac{ax}{x^3} = -\frac{a}{2x^2} + C, \quad \int dx \sqrt[3]{x^2} = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$$

265. Cette constante C , qui doit s'évanouir par la différenciation, est en général arbitraire, à moins que, par la nature du problème, elle ne soit déterminée.

Par exemple, si l'on a l'équation $y = ax^2 - b$, qui est celle d'une parabole CBD (fig. 49), dont l'origine est en A, Fig. 49, et qu'on en tire $dy = 2ax dx$, on trouvera, en intégrant,

$$y = ax^2 + C \dots (1).$$

Cette équation peut convenir à une infinité de paraboles. Or, si l'on veut que parmi toutes ces paraboles, CBD, CB'D', C''B''D'', etc., la courbe qui a pour équation..... $y = ax^2 + C$, soit celle d'une parabole qui passe par le point E dont les coordonnées sont

$$y = 0, \quad x = AE = +\sqrt{\frac{b}{a}},$$

il faudra qu'en faisant $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, on ait $y = 0$, ce qui réduira l'équation (1) à

$$0 = b + C,$$

d'où l'on tirera $C = -b$. Substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtiendra

$$y = ax^2 - b,$$

comme on l'avait avant la différenciation.

266. Lorsque la nature du problème ne détermine pas la constante, on peut disposer de cette constante comme dans l'exemple suivant : ayant trouvé que l'intégrale de

$x^m dx$ est

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \dots (2);$$

nous donnerons à x une valeur déterminée b , et le second membre de cette équation deviendra

$$\frac{b^{m+1}}{m+1} + C \dots (3);$$

C étant arbitraire, nous pouvons déterminer cette constante par la condition que l'expression (3) soit nulle, ou, ce qui revient au même, par la condition qu'on ait $y = 0$ lorsque $x = b$; alors l'équation (2) deviendra

$$0 = \frac{b^{m+1}}{m+1} + C,$$

d'où l'on tirera la valeur de C , qui étant substituée dans l'équation (2) nous donnera

$$y = \frac{x^{m+1} - b^{m+1}}{m+1} \dots (4).$$

267. Il n'y a qu'un seul cas qui échappe à la règle de l'article 262 pour intégrer $x^m dx$; c'est celui où $m = -1$, car alors la formule (4) devient

$$y = \frac{x^0 - b^0}{0} = \frac{0}{0};$$

il faudrait donc, dans ce cas, faire usage de la règle de l'article 81, pour déterminer la vraie valeur de l'intégrale; mais on peut éviter cet inconvénient, en observant que $x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$, et que cette expression $\frac{dx}{x}$ est la différentielle de $\log x$; par conséquent, nous aurons

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

Des différentielles complexes dont l'intégration peut s'effectuer par la règle de l'article 262.

268. Nous avons vu, art. 28, que la différentielle d'un polynôme se formait de la somme des différentielles de ses termes; réciproquement l'intégrale d'un polynôme sera égale à la somme des intégrales des termes qui le composent.

Par exemple,

$$\int \left(adx - \frac{b dx}{x^3} + x dx \sqrt{x} \right) = \int adx - \int \frac{b dx}{x^3} + \int x^{\frac{3}{2}} dx + C,$$

ou, en effectuant les opérations,

$$\int \left(adx - \frac{b dx}{x^3} + x dx \sqrt{x} \right) = ax - \frac{b}{x^2} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$$

Nous n'avons mis ici qu'une constante, parce que chaque terme donnant une constante à l'intégration, nous pouvons représenter la somme de ces constantes par une seule lettre.

269. Tout polynôme, tel que $(a + bx + cx^2 + \text{etc.})^n dx$; peut s'intégrer par la même règle, lorsque n est un nombre entier positif. Pour cela, il suffit d'élever le polynôme à la puissance indiquée, et d'intégrer séparément chaque terme.

Par exemple, pour intégrer $(a + bx)^2 dx$, nous aurons

$$\begin{aligned} \int (a + bx)^2 dx &= \int (a^2 dx + 2abx dx + b^2 x^2 dx) \\ &= a^2 x + abx^2 + \frac{b^2 x^3}{3} + C. \end{aligned}$$

270. Lorsqu'on a une expression telle que $(Fx)^n dFx$,

composée de deux facteurs dont l'un est la différentielle de la partie Fx qui est sous la parenthèse, pour intégrer cette expression, on fera $Fx = z$, par conséquent, $dFx = dz$; substituant, on trouvera

$$(Fx)^n dFx = z^n dz,$$

et en intégrant,

$$\int (Fx)^n dFx = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(Fx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Pour en donner un exemple, soit

$$(a + bx + cx^2)^{\frac{2}{3}} (b dx + 2cx dx);$$

comme $b dx + 2cx dx$ est la différentielle de la quantité renfermée entre les parenthèses, on fera

$$a + bx + cx^2 = z,$$

et l'on aura, en différenciant,

$$b dx + 2cx dx = dz;$$

donc

$$(a + bx + cx^2)^{\frac{2}{3}} (b dx + 2cx dx) = z^{\frac{2}{3}} dz.$$

L'intégrale de cette expression sera

$$\frac{3}{5} z^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} (a + bx + cx^2)^{\frac{5}{3}} + C.$$

271. Si l'un des facteurs était la différentielle de l'autre, à une constante près, l'on pourrait encore intégrer par le même procédé. Soit, par exemple,

$$(a + bx^2)^{\frac{1}{2}} m x dx \dots (5).$$

Comme je vois que la différentielle de $a + bx^2$, qui est $2b x dx$, ne diffère de $m x dx$ que par la constante, je fais

$a + bx^3 = z$, et par conséquent $3bx dx = dz$, d'où je tire $xdx = \frac{dz}{2b}$; substituant ces valeurs dans l'expression (5), j'obtiens

$$-(a + bx^3)^{\frac{1}{2}} m x dx = \frac{m}{2b} z^{\frac{1}{2}} dz,$$

et, en intégrant, il viendra

$$\int (a + bx^3)^{\frac{1}{2}} m x dx = \frac{m}{3b} z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{m}{3b} (a + bx^3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

272. La même transformation peut s'appliquer aussi pour rapporter certaines différentielles à des logarithmes : si l'on avait, par exemple, $\frac{adx}{a + bx}$, en faisant $a + bx = z$, j'en déduirais $dx = \frac{dz}{b}$; substituant, j'aurais

$$\int \frac{adx}{a + bx} = \int \frac{a dz}{b z} = \frac{a}{b} \int \frac{dz}{z} = \frac{a}{b} \log z + C,$$

et, en mettant pour z sa valeur,

$$\int \frac{adx}{a + bx} = \frac{a}{b} \log (a + bx) + C.$$

En opérant de même pour $\frac{adx}{a - bx}$, on trouvera que l'intégrale de cette expression est

$$\int \frac{adx}{a - bx} = -\frac{a}{b} \log (a - bx) + C.$$

Des différentielles qui s'intègrent par arcs de cercle.

273. Soit (fig. 50) $x = CE$, le sinus dont l'arc CB est Fig. 50.

z ; nous avons $x = \sin z$; différenciant, il viendra.....
 $dx = \cos z dz$, d'où nous tirerons $dz = \frac{dx}{\cos z}$; d'une autre
 part, l'équation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ nous donne

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - x^2};$$

substituant cette valeur dans celle de dz , on obtiendra

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

par conséquent on trouvera, en intégrant,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = z + C \dots (6).$$

Pour déterminer la constante, supposons donc que lorsque
 $x = 0$, on ait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0;$$

comme, d'après la figure 50, l'arc z , représenté par CB , est
 nul, en même temps que le sinus x , l'équation (6) se réduira
 donc, dans cette hypothèse, à $0 = C$; par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin(x).$$

274. On peut, de l'intégrale précédente, faire dépendre
 celle de

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

en effet, en divisant les deux termes de la fraction par a ,
 on aura

$$\int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \int \frac{d.\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}};$$

cette intégrale étant composée en $\frac{x}{a}$, comme $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ l'est en x ; il en résulte que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

275. En second lieu, soit z l'arc CD (fig. 50) dont le Fig. 50.
cosinus AG est x ; nous aurons

$$x = \cos z,$$

et, en différenciant,

$$dx = -dz \sin z,$$

d'où l'on tirera

$$dz = -\frac{dx}{\sin z};$$

et, en mettant pour $\sin z$ sa valeur tirée de l'équation

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

on obtiendra

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 z}};$$

ou, parce que $\cos z = x$,

$$dz = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et en intégrant, on aura

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(\cos = x) + C,$$

ou

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \cos + C \dots (7).$$

Pour déterminer la constante, supposons que lorsque $x=0$, $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ soit nul; l'équation (7) se réduit,

dans ce cas, à

$$0 = \text{arc}(\cos = 0) + C \dots (8);$$

or, pour que le cosinus AG de l'arc DC soit nul, il faut que cet arc devienne

$$DB = \frac{1}{2} \text{circ.} = \frac{1}{2} \pi;$$

mettant donc $\frac{1}{2} \pi$ au lieu de $\text{arc}(\cos = 0)$ dans l'équation (8), on a

$$0 = \frac{1}{2} \pi + C,$$

ce qui nous donne

$$C = -\frac{1}{2} \pi;$$

Fig 50. substituant cette valeur dans l'équation (7), on obtient

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{2} \pi - \text{arc DC}\right) = -\text{arc CB}.$$

276. Nous avons vu, art. 45, que

$$d. \text{tang } x = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

si nous faisons $x = \text{tang } z$, nous trouverons

$$dx = \frac{dz}{\cos^2 z};$$

d'où nous tirerons

$$dz = dx \times \cos^2 z;$$

or, la proportion

$$\cos z : 1 :: 1 : \sec z$$

donnant

$$\cos z = \frac{1}{\sec z},$$

on aura

$$\cos^2 z = \frac{1}{\sec^2 z} = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 z} = \frac{1}{1 + x^2};$$

substituant cette valeur, nous trouverons

$$dz = dx \frac{1}{1+x^2},$$

et en intégrant on aura

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = z + C;$$

prenant l'intégrale dans l'hypothèse que cette intégrale s'évanouisse lorsque $x=0$, z devient nul, et l'on a

$$0 = C;$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc dont la tang est } x.$$

277. On peut rapporter à cette formule, celle-ci :

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2};$$

en divisant par a^2 les deux termes de la fraction, on pourra l'écrire ainsi :

$$\int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}};$$

et comme cette intégrale est composée en $\frac{x}{a}$, comme...

$\frac{1}{a} \int \frac{dx}{1+x^2}$ l'est en x , nous aurons

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc } \left(\text{tang} = \frac{x}{a} \right).$$

Soit encore x le sinus verse DG. Le cosinus et le sinus verse valant ensemble l'unité, nous aurons $x + \cos z = 1$,

et, en différenciant,

$$dx = dz \sin z,$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{dx}{\sin z};$$

or,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sqrt{1 - \cos^2 z} = \sqrt{(1 - \cos z)(1 + \cos z)} = \sqrt{x(2-x)} \\ &= \sqrt{2x - x^2}; \end{aligned}$$

substituant, on a

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

et en intégrant,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc}(\text{sinus verse} = x).$$

Nous n'ajoutons point de constante, parce qu'en supposant que l'intégrale s'évanouisse quand x est nul, z est aussi nul.

278. Lorsqu'on veut avoir la valeur de l'intégrale pour une valeur déterminée de x , on opère comme dans l'exemple suivant.

Supposons qu'on demande l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$, lorsque $x=7$; le rayon étant 1, la tangente sera donc 7; et comme les tables des sinus sont construites avec un rayon de 10 milliards de parties, la tangente relative à ce rayon sera 10 milliards de fois plus grande; par conséquent cette tangente vaudra 7×10 milliards.

Le logarithme de la tangente tabulaire aura donc pour expression,

$$\begin{aligned} \log 10 \text{ milliards} + \log 7 &= 10 + \log 7 \\ &= 10 + 0,845098 = 10,845098. \end{aligned}$$

Cherchant ce logarithme dans les tables des sinus, on

verra qu'il répond à un arc de

90° 96', *division décimale*,

ou de

81° 52', *division sexagésimale*.

Pour trouver la valeur numérique de cet arc, dans l'hypothèse du rayon = 1, nous remarquerons que, dans cette hypothèse, la circonférence = 6,283; par conséquent nous aurons

$$400^\circ : 90^\circ 96' :: 6,283 : \text{arc cherché} = 1,42,$$

ou

$$360^\circ : 81^\circ 52' :: 6,283 : \text{arc cherché} = 1,42.$$

De l'intégration par parties.

279. En prenant la différentielle d'un produit de deux variables, par le procédé indiqué article 14, on trouve

$$d.uv = udv + vdu;$$

intégrant et transposant, il vient

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

C'est à cette formule que l'on rapporte les différentielles que l'on veut intégrer par parties.

280. Par exemple, si l'on ignorait quelle est l'intégrale de $x^m dx$, on ferait $x^m = u$, $dx = dv$; et l'on aurait

$$\int x^m dx = x^{m+1} - \int x \cdot m x^{m-1} dx = x^{m+1} - m \int x^m dx;$$

réunissant les termes affectés de $x^m dx$, on a, en transposant,

$$(m + 1) \int x^m dx = x^{m+1};$$

donc

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

281. Soit encore

$$\int dx \log x;$$

je fais

$$\log x = u, \quad dx = dv,$$

et j'ai

$$\int dx \log x = x \log x - \int dx = x \log x - x + C = (\log x - 1)x + C.$$

282. Pour dernier exemple, cherchons à intégrer

$$dx \sqrt{a^2 - x^2}:$$

en faisant

$$\sqrt{a^2 - x^2} = u \quad \text{et} \quad dx = dv,$$

nous trouverons d'abord

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots (9).$$

Nous chercherons ensuite une autre valeur de

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2}:$$

pour cet effet, en multipliant cette dernière expression par

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

nous aurons l'équation identique,

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et, en effectuant la première des intégrations indiquées dans le second membre, nous obtiendrons

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

ajoutant cette équation à l'équation (9), nous trouverons

$$2 \int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\sin = \frac{x}{a} \right);$$

donc

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\sin = \frac{x}{a} \right) + C.$$

On voit par ces exemples que lorsqu'en général on a une expression telle que $\int v du$, l'intégration par parties fait dépendre cette intégrale de celle de $\int u dv$, et que, par conséquent, cette méthode d'intégration n'est pas toujours applicable.

De l'intégration par les séries.

283. Soit $X dx$ une différentielle dans laquelle X représente une fonction de x ; si l'on développe X en une suite

$$Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^i + \text{etc.},$$

ordonnée par rapport aux exposans a, c, γ , etc., on aura

$$\begin{aligned} \int X dx &= \int (Ax^a + Bx^c + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^i + \text{etc.}) dx \\ &= \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{c+1}}{c+1} + \frac{Cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \frac{Dx^{\delta+1}}{\delta+1} + \frac{Ex^{i+1}}{i+1} + \text{etc.} + C. \end{aligned}$$

284. Prenons pour exemple $\frac{dx}{a+x}$, qui est la différentielle de $\log(a+x)$: on écrira ainsi cette fraction...

$\frac{1}{a+x} \times dx$, et il s'agira d'abord de trouver le développement de $\frac{1}{a+x}$, ce que l'on fera au moyen de la division; mais sans effectuer cette opération, on peut déduire le développement

(*) Si l'un des exposans a, c, γ , etc., était égal à -1 , on intégrerait par logarithmes le terme qui en serait affecté.

cherché d'une formule facile à retenir : c'est celle-ci,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4, \text{ etc.... (10) (*)}.$$

En effet, on peut écrire la fraction $\frac{1}{a+x}$ de cette manière :

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{a}\right)};$$

alors, pour obtenir le développement de $\frac{1}{1 + \frac{x}{a}}$, il suffira

de changer z en $-\frac{x}{a}$ dans la formule (10), et l'on aura

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.};$$

donc

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}, \text{ ou } \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.};$$

par conséquent

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.} \right) dx;$$

et, en intégrant chaque terme en particulier, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} + C \dots (11);$$

(*) Cette formule ayant été trouvée par la division, on pourrait croire qu'il vaudrait mieux diviser de suite 1 par $a+x$; mais j'observe que lorsque la formule proposée est gravée dans la mémoire, il est moins long d'en déduire divers développemens que de recommencer chaque fois le calcul.

et, en observant que le premier membre de cette équation est une différentielle logarithmique, art. 272, on aura

$$\log(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} + C \dots (12).$$

Pour déterminer la constante, nous remarquerons que lorsque $x = 0$, cette équation se réduit à $\log a = 0 + C$; substituant cette valeur de C , l'équation (12) deviendra

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.} (*)$$

285. Pour second exemple, cherchons à intégrer par les séries $\frac{dx}{1+x^2}$: en écrivant ainsi cette différentielle.....

$\frac{1}{1+x^2} \times dx$, il s'agira de trouver le développement de $\frac{1}{1+x^2}$. Pour cela, en comparant cette expression à $\frac{1}{1-x}$

(*) Observons qu'en déterminant ainsi la constante, on ne la regarde plus comme arbitraire, puisqu'en faisant $x = 0$, dans l'équation (12), la constante est nécessairement égale au logarithme de a . Là où cette constante a pris une valeur déterminée, c'est lorsqu'au lieu de $\int \frac{dx}{a+x}$ nous avons mis $\log(a+x)$: en effet, l'équation (11) nous montre que $\frac{dx}{a+x}$ est, en général, la différentielle de $C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \text{etc.}$; or, la suite $\log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \text{etc.}$, qui est le développement de $\log(a+x)$, est un cas particulier de la suite précédente : c'est celui où $C = \log a$. Ainsi, lorsqu'on a mis $\log(a+x)$ à la place de $\int \frac{dx}{a+x}$, c'est donc comme si on eût choisi parmi toutes les suites qui sont l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$, celle où la constante est égale à $\log a$.

Cette remarque peut s'appliquer aux autres expressions que nous allons intégrer par les séries.

nous aurons $z = -x^2$; substituant cette valeur dans l'équation (10), nous trouverons

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \text{etc.} \dots (13);$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.} \dots + C,$$

ou plutôt, article 276,

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.} + C \dots (14).$$

Quand $x = 0$, l'arc devenant nul, on a $C = 0$.

286. Si la tangente est plus grande que l'unité, les termes de cette série allant en augmentant, on ne pourra donner une valeur approchée de l'arc; dans ce cas, on obtiendra une série descendante: en opérant ainsi, on fera $x = \frac{1}{x}$ dans l'équation (13), ce qui la changera en

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc.};$$

multipliant les deux termes du premier membre par x^2 , on aura

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc.};$$

divisant par x^2 , on obtiendra

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{etc.} (*)$$

(*) On parviendrait directement au même résultat en divisant 1 par $x^2 + 1$.

donc

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{etc.} \right) dx + C; *$$

et, en effectuant l'intégration indiquée,

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.} + C \dots (15).$$

Pour trouver la valeur de la constante, nous ne ferons pas $x = 0$, car alors les termes du second membre de l'équation (15) deviendraient infinis; mais en faisant $x = \infty$, l'expression $\text{arc}(\text{tang} = x)$ sera égale au quart de la circonférence, et l'équation (15) deviendra $\frac{1}{4} \text{circonférence} = 0 + C$; et en représentant par $\frac{1}{2} \pi$ le quart de la circonférence, l'équation (15) nous donnera

$$\text{arc}(\text{tang} = x) = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.}$$

287. Pour intégrer par les séries

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

on développera $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, par la formule du binôme, de la manière suivante : on calculera d'abord les coefficients du développement de $(1-x^2)^m$, dans l'hypothèse de $m = -\frac{1}{2}$, en écrivant pour former ces coefficients,

$$m, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \text{ etc.},$$

et, en changeant m en $-\frac{1}{2}$, ces expressions deviendront

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad -\frac{7}{8}, \text{ etc.}$$

Multipliant successivement $-\frac{1}{2}$ par $-\frac{3}{4}$, par $-\frac{5}{6}$, etc., on

formera les coefficients qu'on mettra à la place de A, de B, de C, etc., dans cette équation

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - Ax^2 + Bx^4 - Cx^6 + \text{etc.},$$

ce qui donnera

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \text{etc.},$$

et en intégrant l'équation

$$\sqrt{\frac{dx}{1-x^2}} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \text{etc.}\right) dx,$$

on trouvera

$$\text{arc}(\sin x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{x^7}{7} + \text{etc.} \dots (16);$$

nous ne mettons pas de constante, parce que lorsque $x=0$, l'arc dont le sinus est x s'évanouit.

288. Il y a des cas où, pour déterminer la valeur de la constante, on ne peut faire ni $x=0$, ni $x=\infty$. Soit, par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = (x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

en posant

$$m, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \text{etc.},$$

et faisant

$$m = -\frac{1}{2},$$

on trouve

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad \text{etc.},$$

d'où l'on conclut, comme dans l'art. 287,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dx}{x} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{1}{x^6} + \text{etc.}\right)$$

et en intégrant, on trouvera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6x^6} - \text{etc.}$$

d'une autre part,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-1}} = \log(x + \sqrt{x^2-1}); \end{aligned}$$

donc

$$\log(x + \sqrt{x^2-1}) = \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4x^4} - \text{etc....} \quad (17)$$

Pour déterminer la constante, on ne fera pas $x = \infty$, puisqu'alors $\log x$ deviendrait ∞ ; d'une autre part, on n'égalera pas x à zéro, car les termes $\log x$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2}$ etc., deviendraient infinis; mais si l'on suppose $x = 1$, l'équation (17) deviendra

$$0 = 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \text{ etc.} + C = 0,$$

ce qui donne

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

289. La formule (16) peut servir à trouver une valeur approchée de la circonférence; car en faisant $x = \frac{1}{2}$, elle se réduit à

$$\text{arc} \left(\sin = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \text{etc.};$$

or, le sinus qui a pour expression $\frac{1}{2}$, étant égal à la moitié du côté de l'hexagone régulier, comme ce sinus répond à la douzième partie de la circonférence, nous aurons donc

$$\frac{\text{circonf.}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \text{etc.};$$

et par conséquent

$$\text{circonf.} = 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} \right) + \text{etc.};$$

si l'on prend les dix premiers termes de la suite

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \text{etc.},$$

on trouvera

$$0,52359877;$$

donc

$$\frac{1}{2} \text{ circonférence} = 6(0,52359877) = 3,14159262;$$

valeur dans laquelle l'erreur ne porte que sur le dernier chiffre décimal.

290. Nous avons trouvé, art. 284,

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.}$$

Cette série étant peu convergente, faisons $x = -x$; nous aurons

$$\log(a-x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} \text{ etc.};$$

retranchant cette équation de la précédente, cela nous donnera

$$\log(a+x) - \log(a-x) = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \text{etc.} \right),$$

ou

$$\log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \text{etc.} \right) \dots (18).$$

291. Pour déterminer, par exemple, par cette formule, le logarithme de 2, on supposera

$$\frac{a+x}{a-x} = 2,$$

et par conséquent

$$a + x = 2, \quad a - x = 1;$$

donc

$$a = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{a} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}, \text{ etc.};$$

substituant, on aura

$$\log 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{243} + \text{etc.} \right).$$

En se bornant aux dix premiers termes de cette série, réduite en décimales, on déterminera la valeur du logarithme de 2; triplant ce logarithme, on aura celui de 2^3 ou de 8. Si d'une autre part on calcule par la formule (18) le logarithme de $\frac{10}{8}$, et qu'on ajoute ce logarithme à celui de 8, on aura

le logarithme de $\frac{10}{8} \times 8 = \log 10$. On voit que par des procédés analogues, la formule (18) donnerait tout autre logarithme; mais il est à observer que ces logarithmes sont des logarithmes Népériens. Pour en déduire les logarithmes tabulaires, si nous représentons par La le logarithme tabulaire d'un nombre a , nous aurons $a = 10^{La}$; prenant les logarithmes Népériens, cette équation nous donnera

$$\log a = \log 10^{La} = La \log 10;$$

et par conséquent

$$La = \frac{\log a}{\log 10};$$

c'est-à-dire qu'un logarithme tabulaire d'un nombre est égal au logarithme Népérien de ce nombre, divisé par le logarithme Népérien de 10.

292. On a trouvé une série encore plus convergente que celle qui nous est donnée par la formule (18), pour déterminer un logarithme. Voici de quelle manière on peut la déduire de cette formule :

13.

En divisant $a+x$ par $a-x$, on trouve

$$\frac{a+x}{a-x} = 1 + \frac{2x}{a-x};$$

représentons par $\frac{\nu}{z}$ la fraction $\frac{2x}{a-x}$; on a l'équation

$$\frac{a+x}{a-x} = 1 + \frac{\nu}{z} = \frac{z+\nu}{z};$$

et, en multipliant par $a-x$, il vient

$$a+x = a-x + \frac{a\nu}{z} - \frac{\nu x}{z};$$

tous les x étant transposés dans le premier membre, on obtient

$$2x + \frac{\nu x}{z} = \frac{a\nu}{z};$$

multipliant par z , on trouve

$$2zx + \nu x = a\nu,$$

et par conséquent,

$$\frac{x}{a} = \frac{\nu}{2z + \nu};$$

substituant les valeurs de $\frac{a+x}{a-x}$ et de $\frac{x}{a}$ dans la formule (18), on a ce résultat

$$\log\left(\frac{z+\nu}{z}\right) = 2\left(\frac{\nu}{2z+\nu} + \frac{\nu^3}{3(2z+\nu)^3} + \frac{\nu^5}{5(2z+\nu)^5} + \text{etc.}\right),$$

et enfin,

$$\log(z+\nu) = \log z + 2\left(\frac{\nu}{2z+\nu} + \frac{\nu^3}{3(2z+\nu)^3} + \frac{\nu^5}{5(2z+\nu)^5} + \text{etc.}\right).$$

Par exemple, pour avoir le logarithme de 2, on fera $\nu = 1$, $z = 1$, et par conséquent $\log z = 0$; substituant ces valeurs dans la formule précédente, on obtiendra

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(5)^5} + \text{etc.}\right).$$

Il faudra diviser ce logarithme par le logarithme Népérien de 10; art. 291, pour avoir le logarithme tabulaire de 2.

De la méthode des fractions rationnelles.

293. Proposons-nous d'intégrer l'expression

$$\frac{Px^m + Qx^{m-1} \dots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} \dots + R'x + S'} dx,$$

dans laquelle le multiplicateur de dx est une fraction rationnelle ; nous allons démontrer que dans l'expression donnée on peut toujours supposer que n surpasse m ; car, si cela n'était pas, l'intégration pourrait être ramenée à celle d'une différentielle de même forme, dans laquelle la plus haute puissance de x du dénominateur surpasserait la plus haute puissance de x du numérateur ; pour cela il suffirait d'effectuer la division comme dans l'exemple suivant.

Soit

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^3 + R'x + S'};$$

en divisant d'abord tous les termes par Q' , on aura :

$$\frac{\frac{P}{Q'}x^3 + \frac{Q}{Q'}x^2 + \frac{R}{Q'}x + \frac{S}{Q'}}{x^3 + \frac{R'}{Q'}x + \frac{S'}{Q'}};$$

faisons

$$\frac{P}{Q'} = P'', \quad \frac{Q}{Q'} = Q'', \quad \frac{R}{Q'} = R'', \quad \frac{S}{Q'} = S'',$$

$$\frac{R'}{Q'} = R''', \quad \frac{S'}{Q'} = S''';$$

nous aurons

$$\frac{P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S''}{x^3 + R'''x + S'''}.$$

On effectuera la division de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S'' \mid x^2 + R''x + S'' \\ - P''x^3 - R''P''x^2 - P''S''x \\ \hline 1^{re} \text{ reste. } (Q'' - R''P'')x^2 + (R'' - P''S'')x + S''; \end{array}$$

représentons par M et par N les coefficients de x^2 et de x ,

le 1^{re} reste devient $Mx^2 + Nx + S''$.

Suite de la division $-Mx^2 - MR''x - MS''$,

$$\bullet \text{ second reste } (N - MR'')x + S'' - MS'';$$

on peut représenter ce dernier reste par $Kx + L$, et alors on a

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'} dx = (P''x + M) dx + \frac{(Kx + L) dx}{x^2 + R''x + S''};$$

et en intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'} dx &= P'' \frac{x^2}{2} + Mx \\ &+ \int \frac{(Kx + L) dx}{x^2 + R''x + S''} + C; \end{aligned}$$

ainsi la question est ramenée à intégrer.

$$\frac{(Kx + L) dx}{x^2 + R''x + S''}.$$

294. Il résulte de ce qui précède que quelle que soit la fraction rationnelle que l'on considère, son intégration peut toujours être ramenée, dans le cas le plus général, à celle de

$$\frac{Px^{n-1} + Qx^{n-2} \dots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} \dots + R'x + S'} dx.$$

En regardant le dénominateur de cette fraction comme

le produit d'un nombre n de facteurs, tels que $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., ces facteurs peuvent être réels ou imaginaires, égaux ou inégaux.

Pour commencer par le cas le plus simple, nous les supposerons réels et inégaux, et alors nous opérerons comme dans les exemples suivants.

295. Proposons-nous d'abord d'intégrer $\frac{adx}{x^2 - a^2}$: décomposant le dénominateur en ses facteurs, on écrira

$$\frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{adx}{(x - a)(x + a)};$$

et l'on supposera

$$\frac{adx}{(x - a)(x + a)} = \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} \right) dx \dots (19).$$

A et B sont deux constantes qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet, réduisant le second membre au même dénominateur, on obtiendra

$$\frac{adx}{(x - a)(x + a)} = \frac{(Ax + Aa + Bx - Ba)dx}{(x - a)(x + a)}.$$

Supprimant le diviseur commun $(x - a)(x + a)$, et le facteur dx , il restera

$$a = Ax + Aa + Bx - Ba \dots (20);$$

et, en ordonnant par rapport à x , on aura

$$(A + B)x + (A - B - 1)a = 0.$$

x ayant une valeur indéterminée, ainsi que le suppose (*).

(*) En effet, la caractéristique d , qui précède x , annonce que x est considéré comme variable.

la différentielle proposée, cette équation a lieu, quel que soit x ; par conséquent, d'après la méthode des coefficients indéterminés, on égalera séparément à zéro les coefficients des différentes puissances de x ; ou, ce qui revient au même, on égalera entre eux les termes qui, dans l'équation (20), contiennent les mêmes puissances de x , et l'on aura

$$A + B = 0, \quad (A - B - 1)a = 0;$$

ces équations donnent

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (19), on aura donc

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{\frac{1}{2}dx}{x - a} - \frac{\frac{1}{2}dx}{x + a},$$

et en intégrant, on trouvera

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \log(x - a) - \frac{1}{2} \log(x + a) + C;$$

et par conséquent,

$$\int \frac{adx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \log \frac{x - a}{x + a} + C = \log \left(\frac{x - a}{x + a} \right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Pour second exemple, prenons la fraction $\frac{a^3 + bx^3}{a^2x - x^3} dx$: les facteurs du dénominateur sont x et $a^2 - x^2$; et comme $a^2 - x^2$ se décompose en $(a - x)(a + x)$, les facteurs simples du dénominateur sont x , $a - x$, et $a + x$; donc l'expression à intégrer est

$$\frac{a^3 + bx^3}{x(a - x)(a + x)} dx :$$

je fais

$$\frac{a^3 + bx^3}{x(a-x)(a+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} + \frac{C}{a+x} \dots (21);$$

réduisant ces fractions au même dénominateur, il vient

$$\frac{a^3 + bx^3}{x(a-x)(a+x)} = \frac{Aa^2 - Ax^3 + Bax + Bx^2 + Cax - Cx^3}{x(a-x)(a+x)};$$

égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x , on aura

$$B - A - C = b, \quad Ba + Ca = 0, \quad Aa^2 = a^3.$$

La dernière de ces équations nous donne $A = a$, ce qui réduit la première à $B - C = a + b$.

Cette équation étant combinée avec la seconde, on obtient

$$B = \frac{a+b}{2}, \quad C = -\frac{a+b}{2};$$

mettant les valeurs de A , de B et de C , dans l'équation (21), on trouve

$$\frac{a^3 + bx^3}{a^2x - x^3} dx = \frac{adx}{x} + \frac{a+b}{2(a-x)} dx - \frac{a+b}{2(a+x)} dx;$$

donc, en intégrant,

$$\int \frac{a^3 + bx^3}{a^2x - x^3} dx = a \log x - \frac{(a+b)}{2} \log(a-x) (*) \\ - \frac{(a+b)}{2} \log(a+x) + C$$

(*) Pour prendre l'intégrale de $\frac{a+b}{2(a-x)} dx$, comme la différentielle de $a-x$ est $-dx$, il faut écrire

$$-\frac{(a+b)}{2} x - \frac{dx}{a-x},$$

et l'on voit que l'intégrale sera $-\frac{(a+b)}{2} \log(a-x) + C$.

$$= a \log x - \frac{(a+b)}{2} [\log(a-x) + \log(a+x)] + C.$$

$$= a \log x - \frac{(a+b)}{2} \log(a-x)(a+x) + C$$

$$= a \log x - \frac{(a+b)}{2} \log(a^2 - x^2) + C$$

$$= a \log x - (a+b) \log \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

296. Pour troisième exemple, soit $\frac{3x-5}{x^2-6x+8} dx$.

Comme il s'agit d'abord de décomposer le dénominateur en facteurs du premier degré, nous remarquerons que si l'on a une équation de même forme, et représentée par $z^2 - 6z + 8 = 0$, et qui soit satisfaite par les valeurs $z = 2$ et $z = 4$, on sera en droit de conclure qu'elle équivaut au produit $(z-2)(z-4) = 0$. Or, en effectuant la multiplication, on voit que quelque valeur que l'on attribue à z , le produit sera toujours $z^2 - 6z + 8$; donc, lorsqu'au lieu de z nous mettrons x , nous aurons encore

$$(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur du polynôme $x^2 - 6x + 8$, il peut se décomposer en facteurs comme s'il était égal à zéro.

Ayant donc trouvé que les racines de l'équation... $x^2 - 6x + 8 = 0$ sont 2 et 4, nous écrirons

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8} dx = \frac{A dx}{x-2} + \frac{B dx}{x-4} \dots (22).$$

et en supprimant le facteur commun dx , ce que nous aurons toujours soin de faire à l'avenir, nous trouvons, après avoir réduit au même dénominateur,

$$\frac{3x-5}{x^2-6x+8} = \frac{Ax-4A+Bx-2B}{x^2-6x+8};$$

égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x , on obtiendra ces équations de condition,

$$-5 = -4A - 2B, \quad 3 = A + B,$$

d'où nous tirerons

$$B = \frac{7}{2}, \quad A = -\frac{1}{2};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (22), on trouvera

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-5}{x^2-6x+8} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x-4} + C \\ &= \frac{7}{2} \log(x-4) - \frac{1}{2} \log(x-2) + C. \end{aligned}$$

297. Prenons encore pour exemple

$$\frac{x dx}{x^2 + 4ax - b^2};$$

égalant le dénominateur à zéro, et résolvant l'équation, on trouve

$$x^2 + 4ax - b^2 = (x + 2a + \sqrt{4a^2 + b^2})(x + 2a - \sqrt{4a^2 + b^2}).$$

Pour simplifier, représentons ce dernier produit par

$$(x + K)(x + L);$$

nous supposons donc

$$\frac{x}{x^2 + 4ax - b^2} = x \frac{A}{x + K} + \frac{B}{x + L};$$

réduisant le second membre au même dénominateur, nous trouverons

$$\frac{x}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{Ax + AL + Bx + BK}{x^2 + 4ax - b^2},$$

d'où l'on tire

$$AL + BK = 0, \quad A + B = 1,$$

par conséquent

$$A = \frac{K}{K-L}, \quad B = -\frac{L}{K-L};$$

donc

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 4ax - b^2} = \frac{K}{K-L} \log(x+K) - \frac{L}{K-L} \log(x+L) + C.$$

298. En général, soit

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Rx + S}{x^m + Q'x^{m-1} \dots + R'x + S'} dx;$$

une fraction rationnelle dans laquelle les facteurs du premier degré du dénominateur sont supposés inégaux; on résoudra d'abord l'équation

$$x^m + Q'x^{m-1} \dots + R'x + S' = 0;$$

et ayant trouvé qu'elle est le produit des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., on écrira

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Rx + S}{x^m + Q'x^{m-1} \dots + R'x + S'} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.}$$

En réduisant au même dénominateur le second membre de cette équation, chaque terme du numérateur de l'une des fractions devra être multiplié par le produit des dénominateurs des autres, c'est-à-dire par un polynôme en x de l'ordre $m-1$; donc le second membre de cette équation sera un polynôme composé de m termes. Il en résulte que si on égale entre eux les coefficients des mêmes puissances de x , on aura m équations de condition pour déterminer les coefficients A , B , C , etc. Ces coefficients étant connus, on n'aura plus qu'à intégrer une suite de termes tels que

$$\frac{A dx}{x-a}, \quad \frac{B dx}{x-b}, \text{ etc. ;}$$

l'intégrale cherchée sera donc

$$A \log (x-a) + B \log (x-b) + \text{etc.} + C.$$

299. La méthode que nous avons suivie, lorsque les racines du dénominateur sont inégales, ne peut servir si parmi ces racines, que nous supposerons toujours réelles, il y en a d'égales. En effet, nous avons vu que, dans l'hypothèse des racines inégales, on pouvait écrire

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)} \\ = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e};$$

si plusieurs de ces racines étaient égales, si, par exemple, on avait $a=b=c$, l'équation précédente deviendrait

$$\frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} = \frac{A+B+C}{x-a} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e};$$

Alors, en réduisant le second membre au même dénominateur, $A+B+C$ pouvant être considérés comme une seule constante A' , on voit que les trois constantes A' , D et E ne pourraient suffire pour établir les cinq équations de condition qu'on doit obtenir en égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x .

300. Pour éviter cet inconvénient, cherchons à décomposer la fraction

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)}$$

en un autre assemblage de fractions, qui, réduites au même dénominateur, puissent la reproduire.

Supposons donc

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} = \frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}.$$

De cette manière, en réduisant le second membre de cette équation au même dénominateur, nous aurons un polynome en x du quatrième degré, qui renfermera cinq constantes arbitraires; ce qui suffira pour établir l'identité des termes affectés des mêmes puissances de x . Maintenant je vais démontrer que le terme

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{A'}{(x-a)^3} + \frac{B'}{(x-a)^2} + \frac{C'}{(x-a)},$$

A' , B' , C' , étant des constantes indéterminées. Pour le prouver, soit

$$x-a=z;$$

on a

$$x=z+a;$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3} &= \frac{A+Ba+Ca^2+Bz+2Caz+Cz^2}{z^3} \\ &= \frac{A+Ba+Ca^2}{z^3} + \frac{B+2Ca}{z^2} + \frac{C}{z}; \end{aligned}$$

mettant la valeur de z dans cette équation, on obtiendra

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A+Ba+Ca^2}{(x-a)^3} + \frac{B+2Ca}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a},$$

résultat de la forme prescrite, puisque A' , B' , C' sont des constantes.

Cette démonstration pouvant s'appliquer à une équation d'un degré plus élevé, concluons qu'en général, on peut supposer

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Rx + S}{(x-a)^m}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A'}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{m-2}} \dots + \frac{A^n}{(x-a)};$$

Il résulte de ce qui précède, que pour intégrer l'expression

$$\frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)} dx,$$

on supposera

$$\frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)}$$

$$= \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{A'}{(x-a)^2} \dots + \frac{A''}{(x-a)} + \frac{D}{(x-d)} + \frac{E}{(x-e)};$$

réduisant ensuite les fractions au même dénominateur, on déterminera les constantes $A, A', \dots, A'', D, E$, etc., par le procédé que nous avons déjà employé, et l'on aura ensuite à trouver les intégrales des expressions suivantes :

$$\frac{E}{x-e} dx; \frac{D}{x-d} dx, \frac{A''}{x-a} dx, \frac{A'}{(x-a)^2} dx, \frac{A}{(x-a)^3} dx;$$

Les trois premières s'intègrent par logarithmes; à l'égard des deux autres, comme dx est la différentielle de l'expression $x-a$, renfermée entre les parenthèses, nous supposons (art. 270) $x-a = z$, et nous aurons

$$\int \frac{A' dx}{(x-a)^2} = \int \frac{A' dz}{z^2} = \int A' z^{-2} dz = -\frac{A'}{z} = -\frac{A'}{x-a};$$

$$\int \frac{A'' dx}{(x-a)^3} = \int \frac{A'' dz}{z^3} = \int A'' z^{-3} dz = -\frac{A''}{2z^2} = -\frac{A''}{2(x-a)^2};$$

donc enfin

$$\int \frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)} = -\frac{A'}{x-a} - \frac{A''}{2(x-a)^2} \dots$$

$$\dots + A'' \log (x-a) + D \log (x-d) + E \log (x-e)$$

$$+ \text{constante.}$$

301. Prenons pour exemple la fraction *

$$\frac{2axdx}{(x+a)^3};$$

nous aurons

$$\frac{2ax}{(x+a)^3} = \frac{A}{(x+a)^3} + \frac{A'}{x+a};$$

réduisant le second membre au même dénominateur, et supprimant ce dénominateur commun, il reste

$$2ax = A + A'x + A'a,$$

d'où l'on déduira ces équations de condition

$$2a = A', \quad A + A'a = 0;$$

elles donnent

$$A' = 2a, \quad A = -2a^2;$$

par conséquent

$$\frac{2axdx}{(x+a)^3} = -\frac{2a^2dx}{(x+a)^3} + \frac{2adx}{(x+a)} \dots (23).$$

Pour obtenir l'intégrale, remarquons que dx étant la différentielle de $x+a$, nous pouvons supposer $x+a=z$; donc

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^3} = -2a^2 \frac{dz}{z^3} + 2a \frac{dz}{z};$$

intégrant la première fraction du second membre par la règle de l'article 262, et l'autre par logarithmes, nous obtiendrons

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^3} = \frac{2a^2}{z} + 2a \log z + C;$$

et en remettant la valeur de z ,

$$\int \frac{2axdx}{(x+a)^3} = -\frac{2a^2}{a+x} + 2a \log(a+x) + C.$$

302. Pour second exemple, cherchons l'intégrale de

$$\frac{x^2 dx}{x^3 - ax^2 - a^2 x + a^3};$$

en égalant à zéro le dénominateur, on voit que tous les termes se détruisent dans l'hypothèse de $x = a$; donc l'équation $x^3 - ax^2 - a^2 x + a^3$ est divisible par $x - a$. En effectuant cette division, on trouve pour quotient $x^2 - a^2$; ainsi la quantité à intégrer est

$$\begin{aligned} \frac{x^2 dx}{(x^3 - a^3)(x - a)} &= \frac{x^2 dx}{(x + a)(x - a)(x - a)} \\ &= \frac{x^2 dx}{(x - a)^2 (x + a)}. \end{aligned}$$

Nous supposons donc

$$\frac{x^2}{(x - a)^2 (x + a)} = \frac{A}{(x - a)^2} + \frac{A'}{x - a} + \frac{B}{x + a} \dots (24);$$

réduisant le second membre au même dénominateur, on obtient

$$\frac{x^2}{(x - a)^2 (x + a)} = \frac{A(x + a) + A'(x^2 - a^2) + B(x - a)^2}{(x + a)(x - a)^2};$$

développant et égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x , on obtient ces équations de condition :

$$A' + B = 1, \quad A - 2Ba = 0, \quad Aa - A'a^2 + Ba^3 = 0 \dots (25).$$

Si on multiplie la première par a^2 , et qu'on l'ajoute à la troisième, on aura

$$Aa + 2Ba^2 = a^2;$$

celle-ci, à son tour, étant ajoutée à la seconde des équations (25) multipliée par a , on trouve

$$a^3 = 2Aa \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} a,$$

mettant cette valeur de A dans la seconde des équations (25), on obtient

$$B = \frac{1}{4},$$

et par conséquent la première donne

$$A' = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

au moyen des valeurs de ces constantes, l'équation (24), multipliée par dx , devient

$$\frac{x^2 dx}{(x-a)^2 (x+a)} = \frac{adx}{2(x-a)^2} + \frac{3dx}{4(x-a)} + \frac{dx}{4(x+a)}.$$

Pour intégrer $\frac{adx}{2(x-a)^2}$, nous ferons $x-a=z$, et cette expression deviendra $\frac{adz}{2z^2} = \frac{az^{-1}}{2} dz$, et aura pour intégrale, art. 262,

$$-\frac{az^{-1}}{2} = -\frac{a}{2z} = -\frac{a}{2(x-a)};$$

donc

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-a)^2 (x+a)} = -\frac{a}{2(x-a)} + \frac{3}{4} \log(x-a) + \frac{1}{4} \log(x+a) + \text{constante}.$$

303. On opérera de la même manière si, dans le dénominateur, il y a plusieurs groupes de racines égales. Soit, par exemple,

$$\frac{adx}{(x^2-1)^2} = \frac{adx}{(x-1)^2 (x+1)^2};$$

nous poserons

$$\frac{a}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{A'}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{B'}{x+1} \dots (26);$$

et, en réduisant au même dénominateur, nous trouverons

$$\frac{a}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + A'(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)^2 + B'(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

supprimant les dénominateurs et développant les numérateurs, nous trouverons ces équations de condition :

$$\begin{aligned} A' + B' &= 0, \\ A + A' + B - B' &= 0, \\ 2A - A' - 2B - B' &= 0, \\ A - A' + B + B' &= a. \end{aligned}$$

La première de ces équations réduit la troisième à $2A - 2B = 0$, donc $A = B$; la seconde réduit la quatrième à $2A + 2B = a$; de ces équations on conclut....

$A = \frac{a}{4} = B$, par conséquent la quatrième devient....

$B' - A' = \frac{1}{2}a$; cette équation étant combinée avec la première, on trouve

$$A' = -\frac{a}{4}, \quad B' = \frac{a}{4}.$$

Au moyen des valeurs de ces constantes, la différentielle proposée devient

$$\frac{1}{4}a \left[\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{x+1} \right].$$

On intégrera les deux premières de ces expressions par les règles des articles 270 et 262, et les autres par logarithmes, et l'on trouvera

$$\int \frac{adx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}a \left[-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \log(x-1) + \log(x+1) \right] + C.$$

304. Avant que d'examiner le cas où le dénominateur contient des racines imaginaires, faisons quelques observations sur ces sortes de quantités : considérons d'abord l'équation

$$x^2 + px + q = 0 \dots (27),$$

et cherchons les conditions nécessaires pour que les racines de cette équation soient imaginaires : en résolvant cette équation on trouve

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

La première condition nécessaire pour que cette valeur de x soit imaginaire, est que le dernier terme de l'équation (27) soit positif; car, s'il était négatif, l'expression $-q$, qui est sous le radical, changerait de signe, et le radical n'affectant alors que des quantités positives, x ne pourrait être imaginaire. Cette condition étant remplie, x sera imaginaire, si q surpasse $\frac{1}{4}p^2$. L'excès de q sur $\frac{1}{4}p^2$ étant alors une quantité essentiellement positive; représentons-le par β^2 ; puisqu'un carré est toujours positif : nous aurons

$$q = \frac{1}{4}p^2 + \beta^2;$$

faisons $\frac{p}{2} = \alpha$ pour éviter les fractions, cette équation deviendra

$$q = \alpha^2 + \beta^2;$$

substituons ces valeurs de p et de q dans la proposée, nous trouverons

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \dots (28).$$

Cette équation étant résolue, donne

$$x = -\alpha \pm \beta \sqrt{-1} \dots (29);$$

ses deux racines sont donc

$$-\alpha + \beta \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad -\alpha - \beta \sqrt{-1},$$

ce qui montre que ces racines sont disposées par couples, de telle sorte que l'une étant connue, fait connaître l'autre en changeant le signe de la partie imaginaire.

305. En général, une équation peut avoir plusieurs couples de racines imaginaires, et chaque couple donnera lieu à un facteur du second degré, de la forme

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \dots (30).$$

306. Quelquefois les racines imaginaires sont égales, au signe près; c'est ce qui arrive lorsque $\alpha = 0$; alors, l'une des racines est $\beta \sqrt{-1}$ et l'autre $-\beta \sqrt{-1}$, et le facteur (30), du second degré, se réduit à $x^2 + \beta^2$.

307. Pour donner un exemple d'une équation dont les racines sont imaginaires, je prends l'équation

$$x^2 - 6ax + 10a^2 = 0;$$

en la résolvant, je trouve

$$x = 3a \pm \sqrt{-a^2} = 3a \pm a \sqrt{-1};$$

comparant cette valeur de x avec l'équation (29), j'ai

$$-\alpha = 3a, \quad \beta = a;$$

donc, dans le cas présent, l'équation (30) devient

$$x^2 - 6ax + 9a^2 + a^2.$$

308. Au reste, quand on a une équation telle que

$$x^2 + 4x + 12 = 0,$$

dont les racines sont imaginaires (*), on peut la comparer immédiatement à la formule (30), et l'on a $2\alpha = 4$, donc $\alpha^2 = 4$; si l'on retranche 4 de 12, il reste 8 pour β^2 , et l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$x^2 + 4x + 4 + 8 = 0.$$

Le terme 8, à la vérité, n'est pas un carré parfait; mais alors on le regarde comme celui de $\sqrt{8}$.

309. Occupons-nous maintenant de l'intégration des fractions rationnelles dont les dénominateurs renferment des facteurs imaginaires; et, pour commencer par le cas le plus simple, considérons celui où il n'y a qu'une couple de racines imaginaires dans le dénominateur: supposons, par exemple, qu'après avoir décomposé le dénominateur en ses facteurs, on ait trouvé

$$\frac{P + Qx + Rx^2 + Sx^3 \text{ etc.}}{(x-a)(x-b)\dots(x-h)(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)} dx;$$

on égalera, comme nous l'avons déjà fait, art. 300, cette fraction à cette suite de termes:

$$\frac{A dx}{x-a} + \frac{B dx}{x-b} \dots + \frac{H dx}{x-h} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} dx,$$

et ayant déterminé les constantes A, B.... H, M, N, par le procédé que nous avons employé, tous ces termes, hors le dernier, s'intégreront par logarithmes; à l'égard de ce dernier, il s'intégrera de la manière suivante:

On remarquera que $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ étant un carré parfait, le terme à intégrer peut s'écrire ainsi:

$$\frac{Mx + N}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} dx.$$

(*) On le reconnaît lorsque les conditions de l'art. 304 sont remplies,

Et, en faisant $x + a = z$, il devient

$$\frac{Mz + N - Ma}{z^2 + c^2} dz;$$

et, en nommant P la partie constante $N - Ma$, il se réduit à

$$\frac{Mz + P}{z^2 + c^2} dz;$$

cette expression se décompose en celles-ci :

$$\frac{Mz dz}{z^2 + c^2} + \frac{P dz}{z^2 + c^2}.$$

Pour intégrer la première, nous observerons que $z dz$ étant la différentielle de $z^2 + c^2$, à un facteur constant près, on peut, art. 271, supposer $z^2 + c^2 = y$, ce qui nous donnera, en différenciant,

$$z dz = \frac{dy}{2};$$

substituant ces valeurs, nous obtiendrons $\frac{M dy}{2y}$, dont l'intégrale sera

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} \log y &= \frac{M}{2} \log (z^2 + c^2) = \frac{M}{2} \log [(x + a)^2 + c^2] \\ &= \frac{M}{2} \log (x^2 + 2ax + a^2 + c^2) \\ &= M \log (x^2 + 2ax + a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= M \log \sqrt{x^2 + 2ax + a^2 + c^2}. \end{aligned}$$

À l'égard de l'expression $\frac{P dz}{z^2 + c^2}$, en divisant ses deux termes par c^2 , elle peut se mettre sous cette forme :

$$\frac{P}{c^2} \cdot \frac{\frac{dz}{c}}{\frac{z^2}{c^2} + 1},$$

et l'on voit que son intégrale est

$$\frac{P}{\epsilon} \arctan\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{N - M\epsilon}{\epsilon} \arctan\left(\frac{x + \epsilon}{\epsilon}\right);$$

donc, enfin,

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 + \zeta^2} dx \\ = M \log \sqrt{x^2 + 2\epsilon x + \epsilon^2 + \zeta^2} + \frac{N - M\epsilon}{\epsilon} \arctan\left(\frac{x + \epsilon}{\epsilon}\right) \dots (31)$$

310. Prenons pour exemple la fraction $\frac{a + bx}{x^3 - 1} dx$: le dénominateur ayant $x - 1$ pour facteur, nous trouverons l'autre facteur par la division, et la fraction proposée pourra se mettre sous la forme

$$\frac{a + bx}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} dx;$$

$x^2 + x + 1$ étant le produit de deux facteurs imaginaires; ainsi qu'on peut le reconnaître en résolvant l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, nous écrivons

$$\frac{a + bx}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1};$$

réduisant au même dénominateur et opérant comme nous l'avons indiqué, nous trouverons

$$A = \frac{a + b}{3}, \quad M = -\frac{(a + b)}{3}, \quad N = \frac{b - 2a}{3};$$

nous décomposerons ensuite le facteur $x^2 + x + 1$ en facteurs simples, en le comparant à l'expression (30), ce qui nous donnera

$$2\epsilon = 1, \quad \epsilon^2 + \zeta^2 = 1,$$

et par conséquent

$$a = \frac{1}{2}, \quad \epsilon = \sqrt{\frac{3}{4}};$$

substituant ces valeurs et celles de M et de N, dans l'équation (31), qui nous donne la seconde partie de l'intégrale, et observant que la première est

$$\int \frac{A dx}{x-1} = \frac{a+b}{3} \log(x-1),$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \int \frac{(a+bx) dx}{x^3-1} &= \frac{a+b}{3} \log(x-1) - \frac{(a+b)}{3} \log \sqrt{x^2+x+1} \\ &+ \frac{(b-a)}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right] + C. \end{aligned}$$

311. Lorsque la fraction aura dans son dénominateur des facteurs imaginaires égaux, elle contiendra un ou plusieurs facteurs du second degré, de la forme $(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^p$, suivant qu'elle renfermera un ou plusieurs groupes de facteurs imaginaires égaux. Le facteur

$$(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^p$$

correspondra à cette suite de termes :

$$\begin{aligned} &\frac{H + Kx}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^p} + \frac{H' + K'x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^{p-1}} \\ &+ \frac{H'' + K''x}{(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2)^{p-2}} \dots + \frac{H_{p-1} + K_{p-1}x}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \epsilon^2} \dots (32); \end{aligned}$$

et ayant opéré de même pour les autres groupes de facteurs

égaux, on déterminera les constantes

$$H, K, H', K', H'', K'', \dots H_1, K_1, \text{ etc.},$$

comme précédemment.

On multipliera ensuite par dx , et il ne s'agira plus que d'intégrer chaque terme séparément, ce que l'on pourra toujours faire lorsqu'on saura intégrer le premier terme de la suite (32) multiplié par dx , puisque tous les autres sont de même forme. Pour cet effet, nous écrirons ainsi ce terme :

$$\frac{H + Kx}{[(x + a)^2 + \zeta^2]^p} dx;$$

faisant $x + a = z$, il deviendra

$$\frac{H - Ka + Kz}{(\zeta^2 + z^2)^p} dz;$$

et, en nommant M la partie constante $H - Ka$, on aura à intégrer

$$\frac{M + Kz}{(\zeta^2 + z^2)^p} dz.$$

Cette fraction peut se décomposer en ces deux-ci :

$$\frac{Kzdz}{(\zeta^2 + z^2)^p} + \frac{Mdz}{(\zeta^2 + z^2)^p}.$$

Pour intégrer la première, comme zdz est la différentielle de $z^2 + \zeta^2$, à un facteur constant près, nous supposerons $z^2 + \zeta^2 = y$, (art. 271), et nous aurons $zdz = \frac{1}{2} dy$; substituant, on obtiendra

$$\begin{aligned} \int \frac{Kzdz}{(\zeta^2 + z^2)^p} &= \int \frac{1}{2} K \frac{dy}{y^p} = \frac{1}{2} K \int y^{-p} dy = \frac{1}{2} \frac{K y^{-p+1}}{-p+1} \\ &= \frac{1}{2} K \frac{(\zeta^2 + z^2)^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{2} \frac{K}{(1-p)} \frac{1}{(\zeta^2 + z^2)^{p-1}} + C. \end{aligned}$$

Il nous reste à intégrer $\frac{Mdz}{(c^2 + z^2)^p}$, ou plutôt,

$$M(c^2 + z^2)^{-p} dz \dots (33).$$

Pour parvenir à cette intégrale, nous la déduirons de celle de $\int (c^2 + z^2)^p dz$, de la manière suivante :

En diminuant l'exposant p d'une unité, c'est diviser par $c^2 + z^2$; par conséquent, en multipliant en même temps par la même quantité, nous aurons l'équation identique

$$(c^2 + z^2)^p dz = (c^2 + z^2)^{p-1} (c^2 + z^2) dz;$$

et, en exécutant la multiplication indiquée dans le second membre, il viendra

$$(c^2 + z^2)^p dz = c^2 (c^2 + z^2)^{p-1} dz + (c^2 + z^2)^{p-1} z^2 dz;$$

intégrant, on aura

$$\int (c^2 + z^2)^p dz = c^2 \int (c^2 + z^2)^{p-1} dz + \int (c^2 + z^2)^{p-1} z^2 dz \dots (34).$$

Des deux intégrales qui sont dans le second membre de cette équation, nous laisserons la première sous le signe qui l'indique; à l'égard de la seconde, nous y appliquerons l'intégration par parties. Pour cela, en multipliant et en divisant par 2 l'expression $(c^2 + z^2)^{p-1} z^2 dz$, nous l'écrivons ainsi :

$$\frac{z}{2} (c^2 + z^2)^{p-1} 2z dz \dots (35);$$

alors $(c^2 + z^2)^{p-1} 2z dz$ sera la différentielle de $\frac{(c^2 + z^2)^p}{p}$, de sorte que l'expression (35) deviendra

$$\frac{z}{2} \cdot d \frac{(c^2 + z^2)^p}{p};$$

en la comparant à la formule

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

nous ferons

$$u = \frac{z}{2}, \quad v = \frac{(\zeta^2 + z^2)^p}{p},$$

et nous trouverons

$$\int \frac{z}{2} (\zeta^2 + z^2)^{p-1} 2z dz = \frac{z}{2} \frac{(\zeta^2 + z^2)^p}{p} - \int \frac{(\zeta^2 + z^2)^p}{p} \frac{dz}{2}.$$

Substituant cette valeur à la place du dernier terme de l'équation (34), et mettant les constantes en dehors du signe d'intégration, cette équation (34) deviendra

$$\begin{aligned} \int (\zeta^2 + z^2)^p dz &= \zeta^2 \int (\zeta^2 + z^2)^{p-1} dz \\ &+ \frac{z}{2} \frac{(\zeta^2 + z^2)^p}{p} - \frac{1}{2p} \int (\zeta^2 + z^2)^p dz; \end{aligned}$$

transposant le dernier terme dans le premier membre, et réduisant, on trouvera

$$\frac{(1+2p)}{2p} \int (\zeta^2 + z^2)^p dz = \frac{z}{2} \frac{(\zeta^2 + z^2)^p}{p} + \zeta^2 \int (\zeta^2 + z^2)^{p-1} dz;$$

on tire de cette équation

$$\int (\zeta^2 + z^2)^{p-1} dz = -\frac{z}{2p\zeta^2} (\zeta^2 + z^2)^p + \frac{1+2p}{2p\zeta^2} \int (\zeta^2 + z^2)^p dz;$$

faisant $p-1=-p$, et par conséquent $p=1-p$, on a enfin

$$\begin{aligned} &\int (\zeta^2 + z^2)^{-p} dz \\ &= -\frac{z}{2(1-p)\zeta^2} (\zeta^2 + z^2)^{-p+1} + \frac{3-2p}{(2-2p)\zeta^2} \int (\zeta^2 + z^2)^{-(p-1)} dz \dots (36). \end{aligned}$$

Au moyen de cette formule, on fera dépendre l'intégrale de $(\zeta^2 + z^2)^{-p} dz$, d'une autre, dans laquelle la valeur numérique de l'exposant, au lieu d'être p , sera moindre d'une unité; par la même formule, on fera dépendre ensuite l'intégrale de $(\zeta^2 + z^2)^{-(p-1)} dz$, de celle de $(\zeta^2 + z^2)^{-(p-2)} dz$,

ainsi de suite; de sorte qu'après chaque substitution, l'exposant de la partie intégrale diminuant d'une unité, il ne restera plus en dernier lieu qu'à intégrer l'expression

$$(\zeta^2 + z^2)^{-1} dz = \frac{dz}{\zeta^2 + z^2};$$

or, nous avons vu, art. 277, que l'intégrale de cette expression était

$$\frac{1}{\zeta} \arctan \left(\frac{z}{\zeta} \right).$$

On ne cherche pas à faire dépendre l'intégrale $\int (\zeta^2 + z^2)^{-1} dz$, de celle de $\int (\zeta^2 + z^2)^0 dz$, quantité qui se réduit à z ; car, si dans la formule (36) on faisait $p = 1$, le terme

$$\frac{-z}{2(1-p)\zeta^2} (\zeta^2 + z^2)^{-p+1}$$

deviendrait infini.

313. Il résulte de cette théorie, que l'intégration de toute fraction rationnelle ne dépend que de ces trois sortes de formules :

$$1^\circ. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}; \quad 2^\circ. \int \frac{dx}{x+a} = \log(x+a);$$

$$3^\circ. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right);$$

c'est pourquoi on dit que toute fraction rationnelle peut toujours s'intégrer ou algébriquement, ou par logarithmes, ou par arcs de cercle, ou par le concours de ces moyens.

314. Nous terminerons cette théorie par un exemple qui renferme tous les cas : soit donc la fraction rationnelle

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \text{etc}}{RR'R''...SS'...TT'...UU'...} dx,$$

dans laquelle on a

$$\left. \begin{aligned} R &= x - a, \\ R' &= x - b, \\ R'' &= x - c, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs réels inégaux;}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= (x - e)^m, \\ S' &= (x - d)^n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs réels égaux;}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= x^2 + 2ax + a^2 + \zeta^2, \\ T' &= x^2 + 2a'x + a'^2 + \zeta'^2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs imaginaires inégaux;}$$

$$\left. \begin{aligned} U &= (x^2 + 2ax + a^2 + \zeta^2)^p, \\ U' &= (x^2 + 2a'x + a'^2 + \zeta'^2)^q, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \text{facteurs imaginaires égaux;}$$

on supposera

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \text{etc.}}{RR'R'' \dots SS' \dots TT' \dots UU' \dots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$$+ \frac{E}{(x-e)^m} + \frac{E'}{(x-e)^{m-1}} + \frac{E''}{(x-e)^{m-2}} \dots + \text{etc.}$$

$$+ \frac{F}{(x-f)^n} + \frac{F'}{(x-f)^{n-1}} + \frac{F''}{(x-f)^{n-2}} \dots + \text{etc.}$$

$$+ \frac{G + Hx}{x^2 + 2ax + a^2 + \zeta^2} + \frac{K + Lx}{x^2 + 2a'x + a'^2 + \zeta'^2} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{M + Nx}{(x^2 + 2ax + a^2 + \zeta^2)^p} + \frac{M' + N'x}{(x^2 + 2a'x + a'^2 + \zeta'^2)^q} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{P + Qx}{(x^2 + 2ax + a^2 + \zeta^2)^p} + \frac{P' + Q'x}{(x^2 + 2a'x + a'^2 + \zeta'^2)^q} + \text{etc.};$$

et ayant réduit au même dénominateur, on opérera comme nous l'avons expliqué.

De l'intégration des fonctions irrationnelles.

315. Lorsque dans une expression différentielle, qui contient des radicaux, on peut, à l'aide d'une transformation, faire évanouir les radicaux, l'intégration sera ramenée à celle des fractions rationnelles.

On peut toujours faire évanouir les radicaux qui n'affectent que des quantités monomes : le procédé que l'on emploiera, pour y parvenir, sera le même que celui dont nous allons faire usage dans l'exemple suivant :

Soit

$$\frac{\sqrt{x}-3a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx, \text{ ou plutôt } \frac{x^{\frac{1}{2}}-3a}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}} dx;$$

on réduira les exposans fractionnaires au même dénominateur, et ayant trouvé que le dénominateur commun est 6, on supposera $x = z^6$, alors on aura

$$\sqrt{x} = z^3, \quad \sqrt[3]{x} = z^2, \quad dx = 6z^5 dz;$$

substituant ces valeurs, on trouvera

$$\frac{\sqrt{x}-3a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx = \frac{z^3-3a}{z^2-z^3} z^5 dz = \frac{z^6-3az^3}{1-z} dz;$$

on intégrera cette expression par la méthode des fractions rationnelles, et on substituera ensuite dans l'intégrale la valeur de z en x .

316. Il n'en est pas de même lorsque le radical affecte un polynome; cependant on peut intégrer toute expression

en x , qui renferme $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, c'est-à-dire toute expression de la forme

$$F(x, \sqrt{A+Bx+Cx^2})dx.$$

Il peut arriver deux cas : le terme Cx^2 sera positif ou négatif ; s'il est positif, on écrira ainsi le radical,

$$\sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{Bx}{C} + x^2};$$

si ce terme est négatif, nous le regarderons comme le produit de $+C$ par $-x^2$, et alors le radical pourra se mettre sous cette forme,

$$\sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x - x^2};$$

pour simplifier, faisons

$$\frac{A}{C} = a, \quad \frac{B}{C} = b;$$

nous aurons donc à intégrer les deux expressions

$$F(x, \sqrt{a+bx+x^2})dx, \quad F(x, \sqrt{a+bx-x^2})dx.$$

Occupons-nous d'abord de la première.

Notre but étant d'obtenir, par une transformation, les valeurs de x , de dx et de $\sqrt{a+bx+x^2}$, en fonction rationnelle d'une nouvelle variable z , nous supposons

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z + x (*) \dots (37),$$

parce qu'en élevant au carré, les termes en x^2 se détruisant,

(*) On pourrait aussi élever le radical à $z-x$, puisqu'en élevant les deux membres au carré, les termes en x^2 s'évanouiraient également.

il nous restera entre z et x une équation du premier degré, de laquelle on pourra tirer les valeurs de x et de dx en fonction rationnelle de z . Élevant donc l'équation (37) au carré, et supprimant les termes en x^2 , on obtient

$$a + bx = 2xz + x^2 \dots (38),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{z^2 - a}{b - 2z} \dots (39);$$

au moyen de cette valeur, l'équation (37) devient

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2 - a}{b - 2z} + z;$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\sqrt{a + bx + x^2} = -\frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z} \dots (40).$$

Il nous reste à déterminer dx en z : pour cela nous différencierons l'équation (38), et nous obtiendrons

$$b dx = 2x dz + 2z dx + 2z dz,$$

d'où nous tirerons

$$(b - 2z) dx = 2(x + z) dz;$$

et si l'on élimine le radical entre l'équation (37) et l'équation (40), on aura

$$x + z = -\frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera

$$(b - 2z) dx = -\frac{2(z^2 - bz + a)}{b - 2z} dz,$$

et

$$dx = -\frac{2(z^2 - bz + a)}{(b - 2z)^2} dz \dots (41).$$

317. Prenons pour exemple

$$\frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}};$$

nous écrirons ainsi cette expression :

$$\frac{dx}{\sqrt{C} \times x \sqrt{a+bx+x^2}},$$

en faisant $\frac{A}{C} = a$ et $\frac{B}{C} = b$. L'équation (41), divisée par l'équation (40), nous donnera, après avoir réduit,

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \frac{2dz}{b-2z};$$

et, en divisant par l'équation (39), on aura

$$\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+x^2}} = \frac{2dz}{z^2-a};$$

multipliant les dénominateurs par $\sqrt{C}$, cette équation deviendra

$$\frac{dx}{x\sqrt{C}\sqrt{a+bx+x^2}}, \text{ ou } \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}} = \frac{2dz}{(z^2-a)\sqrt{C}},$$

fraction qui s'intègre par la méthode des fractions rationnelles, puisqu'on peut regarder $\sqrt{C}$ comme une constante ordinaire.

318. Pour second exemple, prenons $dx \sqrt{m^2+x^2}$: en comparant le radical à celui de la formule (40), nous avons $a = m^2$, $b = 0$, et en mettant ces valeurs dans les équations

tions (40) et (41), nous trouverons

$$\sqrt{m^2 + x^2} = \frac{z^2 + m^2}{2z}, \quad dx = -\frac{(z^2 + m^2)}{2z^2} dz;$$

donc

$$dx \sqrt{m^2 + x^2} = -\frac{(z^2 + m^2)^2}{4z^3} dz.$$

Lorsqu'on aura intégré cette expression rationnelle, on y substituera la valeur de z en x .

319. La méthode précédente ne peut être employée lorsque Cx^2 est négatif, car en opérant comme ci-dessus, on aurait

$$\begin{aligned} \sqrt{A + Bx - Cx^2} &= \sqrt{C} \sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x - x^2} \\ &= \sqrt{C} \sqrt{a + bx - x^2}. \end{aligned}$$

Or, si nous supposons $\sqrt{a + bx - x^2} = x + z$, en élevant au carré les deux membres de cette équation, les termes en x^2 ne s'évanouiraient pas, et alors la valeur de x en z serait irrationnelle. Pour traiter ce cas, nous remarquerons préliminairement que le polynôme $a + bx - x^2$, est toujours décomposable en facteurs réels du premier degré (*).

(*) Pour le démontrer, nous écrirons ainsi ce polynôme

$$-(x^2 - bx - a),$$

et nous trouverons les facteurs de $x^2 - bx - a$, en égalant à zéro cette expression, ce qui nous donnera

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a};$$

donc, par la propriété des équations

$$x^2 - bx - a = \left(x - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\right) \left(x - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}\right);$$

et puisque; par hypothèse, a représente une quantité positive, les fac-

Soient α et α' les racines de l'équation $x^2 - bx - a = 0$; nous aurons , d'après la propriété des équations ,

$$x^2 - bx - a = (x - \alpha)(x - \alpha'),$$

et par conséquent , en changeant les signes ,

$$\alpha + bx - x^2 = -(x - \alpha)(x - \alpha') = (x - \alpha)(\alpha' - x);$$

substituant cette valeur dans le radical , nous supposons

$$\sqrt{(x - \alpha)(\alpha' - x)} = (x - \alpha)z \dots (42);$$

cette équation élevée au carré , nous donne

$$(x - \alpha)(\alpha' - x) = (x - \alpha)^2 z^2;$$

et , en supprimant le facteur commun , on a

$$\alpha' - x = (x - \alpha)z^2 \dots (43),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2 + 1};$$

donc

$$x - \alpha = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2 + 1} - \alpha,$$

et , en réduisant au même dénominateur ,

$$x - \alpha = \frac{\alpha' - \alpha}{z^2 + 1} \dots (44);$$

cette valeur étant mise dans le second membre de l'équation (42) , on obtient

$$\sqrt{(x - \alpha)(\alpha' - x)} = \frac{\alpha' - \alpha}{z^2 + 1} z \dots (45).$$

teurs qui composent ce produit ne peuvent être imaginaires. Au reste , sans résoudre l'équation $x^2 - bx - a = 0$, on peut conclure , d'après le signe de son dernier terme , art. 304 , qu'elle a ses racines réelles.

A l'égard de dx , il suffit de différencier l'équation (44) pour en obtenir la valeur en z , et nous trouverons.

$$dx = -\frac{2(a'-a)}{(z^2+1)^2} z dz \dots (46).$$

320. Appliquons ce procédé à l'exemple

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}};$$

nous diviserons l'équation (46) par l'équation (45), et nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -\frac{2(a'-a)z}{(z^2+1)^2 z \frac{(a'-a)}{z^2+1}} dz = -\frac{2dz}{z^2+1};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -2 \arcs (\text{tang} = z) + C,$$

ou, en remettant la valeur de z , donnée par l'équation (42);

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} &= C - 2 \arcs \left(\text{tang} = \frac{\sqrt{(x-a)(a'-x)}}{x-a} \right) \\ &= C - 2 \arcs \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{a'-x}{x-a}} \right). \end{aligned}$$

321. Prenons encore pour exemple $dx \sqrt{2ax-x^2}$: en comparant ce radical à celui de l'équation (42), nous aurons $a=0$, $a'=2a$, et les équations (45) et (46) deviennent.

$$\sqrt{x(2a-x)} = \frac{2az}{z^2+1}, \quad dx = -\frac{4az}{(z^2+1)^2} dz;$$

ces équations multipliées l'une par l'autre, nous donnent

$$dx \sqrt{2ax-x^2} = -\frac{8a^2 z^2 dz}{(z^2+1)^3}.$$

expression qui s'intègre par la méthode des fractions rationnelles.

De l'intégration des différentielles binomes.

322. Nous avons vu qu'un moyen très fécond pour intégrer des fonctions qui contiennent des radicaux, était de transformer ces fonctions en d'autres rationnelles, pour pouvoir y appliquer la méthode des fractions rationnelles.

La difficulté est de trouver la transformation qui peut être employée pour chaque cas; nous avons indiqué celle qui convient lorsque les radicaux ne sont que des trinomes, dans lesquels la variable ne surpasse pas le second degré; ces sortes d'expressions étant très fréquentes dans l'Analyse, il était utile de faire connaître la transformation propre à les rendre rationnelles. Nous avons aussi donné un procédé général pour rendre rationnelles les fonctions qui ne contiennent que des monomes élevés à des puissances fractionnaires; nous allons examiner maintenant si, à l'aide d'une transformation, on peut rendre rationnelles les expressions binomes qui sont affectées d'exposans fractionnaires.

323. La formule générale des expressions binomes est

$$x^{n-1} (a + bx^n)^p dx \quad (*)$$

(*) L'expression binôme $Ax^r + Bx^s$ étant un cas particulier de celle-ci, $(Ax^r + Bx^s)^p$, c'est à cette dernière formule que nous rapporterons les différentielles binomes; nous pourrons l'écrire ainsi :

$$[x^r (A + Bx^{s-r})]^p = x^{rp} (A + Bx^{s-r})^p,$$

et, en faisant $s - r = n$, $rp = m - 1$, elle deviendra

$$x^{n-1} (A + Bx^n)^p.$$

On a préféré remplacer rp par $m - 1$, plutôt que par m , parce que les conditions d'intégrabilité seront plus faciles à exprimer, comme nous le verrons.

Si p est un nombre entier, cette formule s'intégrera par l'art. 269; mais lorsque p sera égal à la fraction $\frac{p}{q}$ nous aurons

$$x^{m-1} (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx \dots (47).$$

Pour rendre cette expression rationnelle, nous ferons

$$a + bx^n = z^q \dots (48),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(a + bx^n)^{\frac{1}{q}} = z,$$

et par conséquent

$$(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} = z^p \dots (49).$$

L'équation (48) étant différenciée, nous donne

$$bnx^{n-1}dx = qz^{q-1}dz \dots (50);$$

la même équation (48) étant résolue par rapport à x , on a

$$x = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}};$$

donc, en élevant les deux membres de cette équation à la puissance m , on obtient

$$x^m = \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}};$$

différenciant les deux membres, mettant les constantes en dehors, et divisant par m , on trouve

$$x^{m-1}dx = \frac{q}{nb} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} z^{q-1} dz;$$

substituant, dans l'équation (47), cette valeur ainsi que celle de $(a + bx^n)^{\frac{p}{n}}$, donnée par l'équation (49), on a enfin

$$\frac{q}{nb} \left(\frac{z^q - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} - 1} z^{q+p-1} dz \dots (51).$$

Cette expression est rationnelle lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif; car alors $\frac{z^q - a}{b}$ est élevé à une puissance entière, et l'on peut réduire l'expression (51) à un nombre limité de monomes, qui peuvent s'intégrer chacun par l'article 262 ou par l'art 268. Si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier négatif, l'expression (51) devenant aussi rationnelle, on peut l'intégrer par la méthode des fractions rationnelles.

324. Prenons pour exemple l'expression

$$x^5 (a + bx^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

Dans ce cas, nous aurons

$$p=2, \quad q=3, \quad m-1=5, \quad \text{ou} \quad m=6, \quad n=3;$$

par conséquent la condition d'intégrabilité est satisfaite. Substituant ces valeurs dans l'expression (51), nous aurons à intégrer

$$\frac{3}{2b^3} (z^3 - a)^2 z^4 dz = \frac{3z^{10}}{2b^3} dz - \frac{3a}{b^3} z^7 dz + \frac{3a^2}{2b^3} z^4 dz;$$

donc

$$\int x^5 (a + bx^3)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3z^{11}}{22b^3} - \frac{3az^8}{8b^3} + \frac{3a^2 z^5}{10b^3} + C;$$

on substituera ensuite dans ce résultat la valeur de z en x .

325. Pour obtenir une autre condition d'intégrabilité,

écrivons l'expression (47) de la manière suivante :

$$x^{m-1} \left[\left(\frac{a}{x^n} + b \right) x^n \right]^{\frac{p}{q}} dx;$$

et, en élevant les facteurs du produit $\left(\frac{a}{x^n} + b \right) x^n$, à la puissance $\frac{p}{q}$, nous aurons

$$x^{m-1} x^{\frac{np}{q}} \left(\frac{a}{x^n} + b \right)^{\frac{p}{q}} = x^{m + \frac{np}{q} - 1} (ax^{-n} + b)^{\frac{p}{q}} dx.$$

Or, d'après la démonstration précédente, il faut, pour que cette quantité soit intégrable, qu'on ait

$$\frac{m + \frac{np}{q}}{n} = \text{nombre entier},$$

ou, en exécutant la division indiquée,

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \text{nombre entier}.$$

326. Prenons pour exemple l'expression $x^4 dx \sqrt[3]{a+bx^3}$. En écrivant ainsi cette expression,

$$x^{5-1} (a+bx^3)^{\frac{1}{3}} dx,$$

on a

$$m=5, \quad n=3, \quad p=1, \quad q=3,$$

par conséquent

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2;$$

donc cette quantité est intégrable. Dans ce cas, on aura (art. 325),

$$x^{5-1} (a+bx^3)^{\frac{1}{3}} dx = x^{5-1} \left(\frac{a}{x^3} + b \right)^{\frac{1}{3}} x dx;$$

et en réunissant les exposants de x , cette expression deviendra

$$x^5(ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}} dx \dots (52);$$

faisant $ax^{-3} + b = z^3$, nous trouverons

$$(ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}} = z, \quad x^{-3} = \frac{z^3 - b}{a},$$

ou

$$\left(\frac{a}{x^3} + b\right)^{\frac{1}{3}} = z, \quad \frac{1}{x^3} = \frac{z^3 - b}{a};$$

la dernière de ces équations nous donne

$$x^3 = \frac{a}{z^3 - b},$$

d'où l'on tire, par la différenciation,

$$x^3 dx = -\frac{az^2 dz}{(z^3 - b)^2};$$

multipliant entre elles ces deux dernières équations, on a

$$x^5 dx = -\frac{a^2 z^2 dz}{(z^3 - b)^3};$$

cette valeur de $x^5 dx$, et celle de $(ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}}$ étant substituées dans l'expression (52), on trouve enfin

$$x^5(ax^{-3} + b)^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{a^2 z^2 dz}{(z^3 - b)^3},$$

expression qui est intégrable par la méthode des fractions rationnelles.

Des formules de réduction des différentielles binomes.

327. Lorsque l'équation $x^{m-1} dx(a + bx^n)^p$ ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité que nous venons de prescrire, on peut y appliquer l'intégration par parties, de la manière suivante :

En comparant la formule $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$, au premier membre de l'équation

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

nous supposons

$$(a + bx^n)^p = u, \quad x^{m-1} dx = dv; \quad \text{donc } v = \frac{x^m}{m};$$

et nous aurons, en mettant les constantes en dehors du signe d'intégration,

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} x^{n-1} dx,$$

ou, en réunissant les exposans de x ,

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} \int x^{m+n-1} (a + bx^n)^{p-1} dx \dots (53);$$

d'une autre part, on a l'équation identique

$$(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p-1} (a + bx^n),$$

et, en exécutant la multiplication indiquée, cette équation donne

$$(a + bx^n)^p = a(a + bx^n)^{p-1} + bx^n(a + bx^n)^{p-1};$$

multipliant les deux membres par $x^{m-1} dx$, on trouve

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = a \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{p-1} + b \int x^{m+n-1} dx (a + bx^n)^{p-1} \dots (54).$$

Au moyen de cette équation, on peut éliminer le dernier terme de l'équation (53); car si on multiplie l'équation (54) par $\frac{pn}{m}$, et qu'on l'ajoute à l'équation (53), on trouvera

$$\left(1 + \frac{pn}{m}\right) \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^p \frac{x^m}{m} + \frac{pna}{m} \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{p-1};$$

multipliant par m et divisant ensuite par le facteur constant du premier membre, on obtiendra

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p = \frac{x^m}{(m+pn)} (a + bx^n)^p + \frac{pna}{m+pn} \int x^{m-1} dx (a + bx^n)^{p-1} \dots (55).$$

Par cette formule on pourra donc faire dépendre l'intégrale de... $\int x^{m-1} dx (a + bx^n)^p$, d'une autre dans laquelle l'exposant qui affecte la parenthèse sera moindre d'une unité.

Si dans cette formule on met ensuite $p-1$ à la place de p , l'intégrale

de $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}$ dépendra de celle de $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-2}$; par un même procédé, celle-ci, à son tour, dépendra de celle de $\dots$ $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-3}$, et ainsi de suite : de sorte que l'exposant de la parenthèse sera successivement $p, p-1, p-2, p-3, \dots, p-n$. (Par n , nous représentons le plus grand nombre entier contenu dans p que nous supposons fractionnaire. Si l'on peut obtenir l'intégrale de $x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-n}$, on aura celle où l'exposant de $a+bx^n$ est plus fort d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à l'intégrale de $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$, qu'on obtiendra de cette manière, en un nombre limité de termes algébriques.

327. Si p était négatif, l'équation (55) donnerait

$$f x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} = \frac{-x^m (a+bx^n)^{p-1} + (m+pn) f x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{pna};$$

faisant $p-1 = p$, on aurait

$$f x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{-x^m (a+bx^n)^{p+1} + [m+(p+1)n] f x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na} \dots (56);$$

formule dans laquelle, si l'on fait p négatif, l'intégrale proposée dépendra d'une autre dans laquelle l'exposant de la parenthèse sera plus près de zéro d'une unité.

328. On peut aussi diminuer l'exposant de x , hors de la parenthèse. Pour cet effet, on égalera entre eux les seconds membres des équations (53) et (54), vu que les premiers sont égaux, ce qui donnera

$$(a+bx^n)^p \frac{x^m}{m} - \frac{pnb}{m} f x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx \\ = a f x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1} + b f x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^{p-1},$$

d'où l'on tirera

$$\left(b + \frac{pnb}{m}\right) f x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx = (a+bx^n)^p \frac{x^m}{m} - a f x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1},$$

et par conséquent

$$f x^{m+n-1} (a+bx^n)^{p-1} dx = \frac{(a+bx^n)^p x^m - m a f x^{m-1} dx (a+bx^n)^{p-1}}{b(m+pn)};$$

faisons $m+n = m$, $p-1 = p$; cette équation deviendra

$$f x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^m - (m-n) a f x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{b(m+pn)} \dots (57);$$

Au moyen de cette formule, l'intégrale dépendra d'une autre dans la-

quelle la partie x^{m-1} , hors de la parenthèse, deviendra x^{m-n-1} ; cette seconde intégrale dépendra à son tour d'une troisième, dans laquelle la partie hors de la parenthèse, sera $m-2n-1$: en continuant ainsi, les exposans de x hors de la parenthèse seront successivement $m-1$, $m-n-1$, $m-2n-1$, $m-3n-1$... $m-rn-1$. (Par rn , on entend le plus grand multiple renfermé dans m .)

A la dernière de ces opérations, l'exposant de x hors de la parenthèse, dans le second membre de l'équation de réduction, sera donc $m-rn-1$; par conséquent x , dans le premier membre de cette équation, aura pour exposant $m-(r-1)n-1$: ainsi, en faisant $m=m-(r-1)n$, dans la formule (57), et en représentant par X la partie intégrée, cette formule nous donnera

$$\int x^{m-(r-1)n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{X-(m-rn)a \int x^{m-rn-1} dx (a+bx^n)^p}{bn(m-(r-1)n+pn)} \dots (58).$$

Si rn est égal à m , le coefficient $m-rn$ est zéro, ce qui fait évanouir, dans le second membre de l'équation précédente, la partie affectée du signe d'intégration, et il reste

$$\int x^{m-(r-1)n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{X}{bn(1+p)}.$$

Cette intégrale étant déterminée exactement, toutes les autres le sont à leur tour, par conséquent la formule proposée est alors intégrable.

329. Nous avons supposé que m était positif dans la formule (57) qui diminue l'exposant hors de la parenthèse; pour avoir celle qui convient au cas où m serait négatif, nous tirerons de la formule (57),

$$\int x^{m-n-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^{m-n} - b(m+np) \int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p}{(m-n)a};$$

faisant $m-n=m$, on aura

$$\int x^{m-1} dx (a+bx^n)^p = \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^m - b(m+n+np) \int x^{m+n-1} dx (a+bx^n)^p}{ma} \dots (59).$$

Au moyen de cette formule, quand l'exposant hors de la parenthèse est négatif, l'intégrale dépend d'une autre, dans laquelle la valeur de cet exposant est moindre de n unités; car l'exposant de x , hors de la parenthèse, dans le second membre de l'équation (59), étant $m+n-1$, si l'on remplace m par sa valeur négative, que nous représenterons par m' , cet exposant deviendra $-(m'-n)-1$, tandis que celui de x , hors de la parenthèse, dans le premier membre, sera $-m'-1$; et en ne con-

siderant que les valeurs numériques de ces exposans, il est certain que $-(m'-n)-1$ surpassera $-m'-1$, de n unités.

330. Pour donner une application de ces formules, soit

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

J'écris ainsi cette expression : $x^m dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; et en la comparant à celle-ci, $x^{m-1} dx(a+bx^n)^p$, j'aurai

$$m-1=m, \text{ ou } m=m+1, a=1, b=-1, n=2, p=-\frac{1}{2}.$$

L'exposant de la parenthèse ayant une valeur numérique moindre que l'unité, nous chercherons à diminuer l'exposant qui est hors de la parenthèse, et, en conséquence, nous substituerons les valeurs précédentes dans la formule (57), ce qui la changera en celle-ci :

$$\int x^m dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x^{m-1} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} + \frac{m-1}{m} \int x^{m-2} dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ou

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} \dots (60).$$

Si l'on fait successivement

$$m=m-2, \text{ on a } \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-3} \frac{\sqrt{1-x^2}}{m-2} + \frac{m-3}{m-2} \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$m=m-4, \dots \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-5} \sqrt{1-x^2}}{m-4} + \frac{m-5}{m-4} \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$m=m-6, \dots \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-7} \sqrt{1-x^2}}{m-6} + \frac{m-7}{m-6} \int \frac{x^{m-8} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

ainsi de suite.

La première de ces équations nous donnera la valeur de $\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, qu'on mettra dans l'équation (60), et l'on trouvera

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{m-1}{m} \frac{x^{m-3}}{m-2} \right] + \frac{m-1}{m} \frac{m-3}{m-2} \int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

on substituera ensuite successivement, dans ce résultat, les valeurs de

$$\int \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et de } \int \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ etc.};$$

si m est un nombre entier pair, la dernière intégrale que l'on obtiendra sera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x);$$

si m est un nombre entier impair, cette dernière intégrale sera

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et comme alors $x dx$ est la différentielle de x^2 , à un facteur constant près, nous ferons $1-x^2 = z$, ce qui nous donnera

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int -\frac{1}{2} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int -\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = -z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-x^2}.$$

La dernière intégrale étant trouvée, il en résulte que lorsque m sera un nombre entier, la formule pourra toujours s'intégrer.

331. Prenons encore pour exemple $\frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$: en écrivant ainsi cette expression

$$x^{-m}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

on la comparera à la formule (59) pour diminuer l'exposant hors de la parenthèse, et l'on aura

$$m-1 = -m, \quad a = 1, \quad b = -1, \quad n = 2, \quad p = -\frac{1}{2};$$

au moyen de ces valeurs, la formule (59) deviendra

$$\int x^{-m} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1-m} x^{1-m} + \frac{(2-m)}{1-m} \int x^{-m+2} dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ou plutôt

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{1-x^2}}. \quad (61).$$

Si m est un nombre pair, par exemple 8, l'intégrale de $\frac{dx}{x^8 \sqrt{1-x^2}}$ dépendra de celle de $\frac{dx}{x^6 \sqrt{1-x^2}}$; celle-ci, en vertu de la même formule, dépendra à son tour de celle de $\frac{dx}{x^4 \sqrt{1-x^2}}$, jusqu'à $m=2$; dans ce

dernier cas, la formule (61) donnera

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C;$$

de sorte que, par des substitutions successives, on obtient l'intégrale lorsque m est pair.

Dans le cas où m est impair, par exemple 7, en mettant successivement dans la formule (61) à la place de m , les valeurs 7, 5, 3, on ne pourra s'arrêter à $m \equiv 1$; car, dans cette hypothèse, le coefficient $\frac{m-2}{m-1}$

de la seconde intégrale deviendrait $-\frac{1}{0} = -\infty$; ainsi, la plus petite valeur que l'on pourra donner à x , sera $x = 3$. Dans cette hypothèse, la formule (61) deviendra

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}.$$

Pour intégrer l'expression $\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$, nous ferons $x = \frac{1}{z}$, ce qui nous donnera

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}};$$

nous avons trouvé, art. 288, page 193,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \log(x + \sqrt{x^2-1});$$

donc, en changeant x en z , nous aurons

$$\int -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = -(\log z + \sqrt{z^2-1});$$

remettant pour z sa valeur $\frac{1}{x}$, on aura

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = -\log \left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} \right] + C = -\log \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) + C.$$

Ainsi la formule $\frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$ peut s'intégrer, soit qu'on prenne m pair ou impair.

De l'intégration des quantités qui renferment des sinus et des cosinus.

332. L'intégration des quantités qui renferment des sinus et des cosinus dépendant de la possibilité de développer $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, etc., en fonction des expressions $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, etc., nous allons démontrer préliminairement comment on peut y parvenir par la seule Trigonométrie (note troisième).

Si dans la formule

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \dots (62);$$

on fait $a = b$, on aura

$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= 2 \cos^2 a - 1; \end{aligned}$$

on tire de là

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a;$$

multipliant cette équation par $\cos a$, elle devient

$$\cos^3 a = \frac{1}{2} \cos a + \frac{1}{2} \cos a \cos 2a \dots (63).$$

Or, si à l'équation (62) on ajoute celle-ci :

$$\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

on obtiendra

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(b-a);$$

faisant $b = 2a$, on aura

$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{2} \cos 3a + \frac{1}{2} \cos a;$$

éliminant $\cos a \cos 2a$, entre cette équation et l'équation (63), on trouvera

$$\cos^3 a = \frac{3}{4} \cos a + \frac{1}{4} \cos 3a.$$

On calculerait par le même procédé les puissances supérieures de $\cos a$.

333. Cela posé, lorsqu'on aura à intégrer l'expression $\cos^m x dx$, dans laquelle m est un nombre entier, on mettra pour $\cos^m x$, son développement qui, d'après ce qui précède, ne contiendra que des termes pris dans cette suite :

constante, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, etc.,

de sorte que tout se réduit à savoir intégrer un terme de la forme $\cos mx dx$.

Pour cet effet, nous remarquerons que si dans l'équation

$$d \sin z = \cos z \cdot dz,$$

on fait $z = mx$, on aura

$$d \sin mx = \cos mx \cdot m dx;$$

donc

$$\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m}.$$

On trouverait de même que

$$\int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m}.$$

Prenons pour exemple $\cos^3 x \cdot dx$: mettant pour $\cos^3 x$ sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$, nous aurons

$$\int \cos^3 x dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

334. Si l'on voulait intégrer $\sin^m x dx$, on procéderait d'une manière analogue ; ou bien, en représentant par z l'arc complément de x , on aurait

$$x = \frac{1}{2} \pi - z \quad \text{et} \quad dx = -dz, \quad \sin x = \cos z;$$

on changerait donc la formule $\sin^m x \cdot dx$, en celle-ci : $-\cos^m z dz$, et l'on intégrerait comme ci-dessus.

335. Prenons le cas plus général $\sin^m x \cos^n x dx$; si m est

pair on fera $m = 2m'$, et l'on aura à intégrer

$$\sin^{2m'} x \cos^n x dx = (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x dx.$$

On développera $(1 - \cos^2 x)^{m'}$, et en multipliant par $\cos^n x dx$, on obtiendra une suite de termes, chacun de la forme $\cos^k x dx$, et l'on intégrera comme ci-dessus. Si m est impair, on fera $m = 2m' + 1$, et l'on aura

$$\begin{aligned} \sin^n x \cos^n x dx &= \sin^{2m'} x \cos^n x \sin x dx \\ &= (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x \times -d \cos x; \end{aligned}$$

faisant $\cos x = z$, on changera cette expression en

$$- (1 - z^2)^{m'} z^n dz;$$

m' et n étant par hypothèse des entiers, on développera et on intégrera.

336. Pour appliquer ce procédé aux expressions

$$\frac{\cos^n x dx}{\sin^n x}, \quad \frac{\sin^n x dx}{\cos^n x};$$

comme la seconde rentre dans l'autre, en faisant $x = \frac{\pi}{2} - z$, nous ne considérerons que la première. Si m est pair nous supposons $m = 2m'$, et nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\cos^{2m'} x dx}{\sin^n x} &= \frac{(1 - \sin^2 x)^{m'}}{\sin^n x} \\ &= \frac{1 - m' \sin^2 x + m' \frac{m' - 1}{2} \sin^4 x + \text{etc.}}{\sin^n x} dx, \end{aligned}$$

expression dont l'intégrale dépendra de celles de $\sin^k x dx$ et de $\frac{dx}{\sin^k x}$.

Nous savons intégrer la première, et nous verrons bientôt

comment s'intègre la seconde. Si m est impair, en faisant $m = 2m' + 1$, on aura

$$\frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{(1 - \sin^2 x)^{m'} \cos x dx}{\sin^n x} = (1 - m' \sin^2 x + \text{etc.}) \frac{\cos x dx}{\sin^n x},$$

expression dont l'intégrale dépendra de celles de
 $\sin^k x \cos x dx$ et de $\frac{dx \cos x}{\sin^k x}$; nous avons traité de la première, art. 334, occupons-nous de la seconde. Pour intégrer $\frac{dx \cos x}{\sin^k x}$, nous ferons $\sin x = z$; donc $dx \cos x = dz$, et par conséquent

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin^k x} = \int \frac{dz}{z^k} = \int z^{-k} dz = \frac{z^{-k+1}}{1-k} + C.$$

A l'égard de l'intégrale de $\frac{dx}{\sin^k x}$, la même transformation changera cette expression en $\frac{dz}{z^k \sqrt{1-z^2}}$, formule que nous savons intégrer.

337. Enfin si l'on a à intégrer $\frac{dx}{\cos^m x \sin^n x}$, on multipliera cette expression par $\cos^2 x + \sin^2 x$, quantité qui équivaut à l'unité, et l'on aura

$$\frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \frac{dx}{\cos^{m-2} x \sin^n x} + \frac{dx}{\cos^m x \sin^{n-2} x};$$

par là on diminuera la somme des exposans du dénominateur; et, en répétant un certain nombre de fois cette opération, et en mettant successivement à part toutes les fractions qui, dans leurs dénominateurs, ne renferment qu'une puissance d'un sinus ou d'un cosinus (parce qu'on sait intégrer ces fractions d'après ce qui précède), à la dernière opération, on tombera sur des termes qui pourront encore contenir des puissances de sinus et de cosinus, ou qui seront des

formes suivantes :

$$\frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \frac{dx}{\cos x}, \quad \frac{dx}{\sin x}.$$

Pour intégrer $\frac{dx}{\sin x \cos x}$, on multipliera le numérateur par $\cos^2 x + \sin^2 x$, et l'on aura

$$\frac{dx}{\sin x \cos x} = dx \frac{\cos x}{\sin x} + dx \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d \sin x}{\sin x} - \frac{d \cos x}{\cos x},$$

expression dont l'intégrale est

$$\log \sin x - \log \cos x + \log C = \log C \operatorname{tang} x.$$

Pour intégrer $\frac{dx}{\sin x}$, on fera $\cos x = z$, et l'on aura

$$dx = -\frac{dz}{\sin x} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{\sin x} = -\frac{dz}{\sin^2 x} = -\frac{dz}{1-z^2},$$

formule intégrable par la méthode des fractions rationnelles.

A l'égard de $\frac{dx}{\cos x}$, on supposera $\sin x = z$, et l'on trouvera

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

338. En général, on peut toujours transformer les expressions qui contiennent des sinus et des cosinus en d'autres qui n'en renferment pas : pour cela, il suffit d'égaliser $\sin x$ ou $\cos x$ à une nouvelle variable z . Par exemple, si dans l'expression $\sin^m x \cos^n x dx$, on suppose $\sin x = z$, on aura

$$\cos x = \sqrt{1-z^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

substituant, on trouvera

$$\begin{aligned} \sin^m x \cos^n x dx &= z^m (1-z^2)^{\frac{n}{2}} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= z^m (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz, \end{aligned}$$

expression qui se rapporte aux différentielles binomes.

On peut aussi appliquer immédiatement l'intégration par parties à l'expression (*) $\sin^m x \cos^n x dx$.

339. Enfin, les formules trigonométriques peuvent être aussi employées avec avantage dans de certains cas. Pour intégrer, par exemple, $\sin mx \cos nx dx$; comme la Trigonométrie nous donne

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b);$$

en comparant l'expression $\sin mx \cos nx$ à cette formule, on trouvera

$$\sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \sin[(m+n)x] dx + \frac{1}{2} \sin[(m-n)x] dx,$$

et l'intégrale sera, art. 333,

$$C - \frac{1}{2} \frac{\cos[(m+n)x]}{m+n} - \frac{1}{2} \frac{\cos[(m-n)x]}{m-n}.$$

De l'intégration des quantités exponentielles et logarithmiques.

340. Il a été démontré, art. 37, qu'en prenant les logarithmes dans le système Népérien, on avait $da^x = a^x dx \log a$; donc, réciproquement,

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

Ceci peut nous servir pour intégrer l'expression générale $a^x X dx$, dans laquelle X est une fonction de x . Pour cet

(*) Pour la comparer à $u dv$, on la décomposera ainsi :

$$\sin^{m-1} x \cdot \cos^n x \sin x dx = -\sin^{m-1} x \cdot d \frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x.$$

effet, nous écrirons ainsi cette expression : $X \cdot a^x dx$; et en intégrant par parties , nous aurons

$$\int X \cdot a^x dx = \frac{X \cdot a^x}{\log a} - \int \frac{a^x}{\log a} dX \dots (64).$$

Cela posé, en différenciant successivement la fonction X , nous en tirerons $dX = X' dx$, $dX' = X'' dx$, etc. ; donc

$$\int \frac{a^x}{\log a} dX \text{ ou } \int \frac{X'}{\log a} \cdot a^x dx = \frac{X'}{(\log a)^2} a^x - \int \frac{a^x}{(\log a)^2} dX';$$

substituant cette valeur à la place du dernier terme de l'équation (64), nous obtiendrons

$$\int X a^x dx = \frac{X \cdot a^x}{\log a} - \frac{X' \cdot a^x}{(\log a)^2} + \int \frac{a^x}{(\log a)^2} dX'.$$

En continuant d'opérer de la sorte, nous parviendrons à ce développement

$$\begin{aligned} \int X a^x dx = a^x & \left(\frac{X}{\log a} - \frac{X'}{(\log a)^2} + \frac{X''}{(\log a)^3} - \frac{X'''}{(\log a)^4} + \dots \pm \frac{X^{(n)}}{(\log a)^{n+1}} \right) \\ & \mp \int \frac{a^x dX^{(n)}}{(\log a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Si, en prenant la suite des coefficients différentiels X' , X'' , $X''' \dots X^{(n)}$, le dernier de ces coefficients est constant, on aura $dX^{(n)} = 0$, et alors la partie intégrale s'évanouira.

341. Prenons pour exemple $X = x^3$, d'où l'on déduit

$$X' = 3x^2, \quad X'' = 2 \cdot 3x, \quad X''' \text{ ou } X^{(3)} = 3 \cdot 2;$$

donc

$$\int x^3 a^x dx = a^x \left(\frac{x^3}{\log a} - \frac{3x^2}{(\log a)^2} + \frac{2 \cdot 3x}{(\log a)^3} - \frac{2 \cdot 3}{(\log a)^4} \right).$$

Si l'on fait a égal au nombre e , qui est la base du système Népérien, $\log a$ devient $\log e$; or, $\log e = 1$, en vertu de l'équation $e = e^{\log e}$; par conséquent

$$\int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 2.3x - 2.3).$$

342. On peut encore parvenir à un autre développement de $\int a^x . X dx$. Pour cela faisons $\int X dx = P$, $\int P dx = Q$, $\int Q dx = R$, etc., et intégrons par parties, nous aurons

$$\int a^x . X dx = a^x P - \int a^x \log a . P dx \dots (65),$$

$$\int a^x \log a . P dx = a^x \log a . Q - \int a^x (\log a)^2 Q dx;$$

et en substituant, l'équation (65) deviendra

$$\int a^x . X dx = a^x P - a^x \log a . Q + \int a^x (\log a)^2 Q dx.$$

En continuant d'intégrer par parties, on aura en général

$$\int a^x X dx = a^x [P - Q \log a + R (\log a)^2 - \text{etc.}] \dots$$

$$\pm \int Z a^x (\log a)^n dx.$$

343. Si l'on applique cette formule au cas où $X = \frac{1}{x^3}$, on trouvera

$$P = -\frac{1}{4x^4}, \quad Q = \frac{1}{3.4x^3}, \quad R = -\frac{1}{2.3.4x^2}, \quad Z = \frac{1}{2.3.4x};$$

donc

$$\int \frac{a^x dx}{x^3} = a^x \left[-\frac{1}{4x^4} - \frac{\log a}{3.4x^3} - \frac{\log a^2}{2.3.4x^2} \right] - \frac{\log a^3}{2.3.4} \int \frac{a^x dx}{x}.$$

L'intégrale de $\frac{a^x dx}{x}$ est une fonction transcendante qu'on n'a pu déterminer jusqu'à ce jour.

344. En général, on voit que quelque puissance négative et entière que l'on prenne pour exposant de x , on doit

toujours tomber sur cette transcendante $\int \frac{a^x dx}{x}$; car dans les fonctions successives P, Q, R, etc., les exposans de x diminuant toujours d'une unité, la dernière de ces fonctions doit être de la forme $\frac{A}{x}$, et par conséquent la dernière intégrale sera

$$\int \frac{Aa^x}{x} dx = A \int \frac{a^x dx}{x},$$

parce que A est constant.

Pour avoir une valeur approchée de l'intégrale de... $\frac{Aa^x dx}{x}$, on n'a d'autres moyens que de substituer dans cette expression le développement de a^x qui est, comme on l'a vu,

$$1 + x \log a + \frac{x^2}{2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} (\log a)^3 + \text{etc.},$$

et d'intégrer ensuite chaque terme.

345. Si dans l'équation $\frac{du}{u} = d \log u$, ou plutôt.... $du = u d \log u$, on fait $u = x^y$, on aura

$$dx^y = x^y d \log x^y;$$

ainsi, toutes les fois qu'on pourra décomposer une différentielle en deux valeurs dont l'une soit représentée par x^y , et l'autre par $d \log x^y$, l'intégrale sera $x^y + C$.

346. L'intégration par parties peut aussi s'appliquer à celle de l'expression $X dx (\log x)^n$; car si l'on représente par X, l'intégrale de $X dx$, on aura

$$\int X dx (\log x)^n = X, (\log x)^n - n \int \frac{X}{x} dx (\log x)^{n-1}.$$

On fera dépendre à son tour cette dernière intégrale d'une autre, de la forme $\int X_1 dx (\log x)^{n-1}$, et ainsi de suite.

De la série de Jean Bernoulli.

347. Nous avons vu que beaucoup d'expressions différentielles n'étaient intégrables qu'après avoir été réduites en série, et que, pour cet effet, en désignant par Xdx une différentielle dans laquelle X est une fonction quelconque de x , il fallait préliminairement réduire en série la fonction qui est représentée par X , et intégrer ensuite après avoir substitué ce développement dans la formule Xdx .

La série de Bernoulli a l'avantage de réduire $\int Xdx$ en série, avant même que l'on ait donné la forme de X ; cette série est dans le Calcul intégral ce que celle de Taylor est dans le Calcul différentiel. Voici de quelle manière on la démontre. Cherchant d'abord à intégrer Xdx par parties, on comparera $\int Xdx$ au premier terme de la formule

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

et l'on aura

$$X = u, \quad dx = dv;$$

par conséquent l'intégration par parties s'effectuera en écrivant

$$\int Xdx = Xx - \int xdX \dots (66);$$

l'intégrale se prenant par rapport à la variable x , nous avons

$$dX = \frac{dX}{dx} \cdot dx;$$

par conséquent

$$\int xdX = \int \frac{dX}{dx} \cdot x dx.$$

Intégrant encore par parties, u sera représenté, dans ce cas, par $\frac{dX}{dx}$ et dv par $x dx$, de sorte que nous aurons

$v = \frac{x^2}{2}$, et nous trouverons

$$\int \frac{dX}{dx} \cdot x dx = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} dx,$$

ou, en mettant la fraction $\frac{1}{2}$ hors du signe d'intégration,

$$\int \frac{dX}{dx} x dx = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^2X}{dx^2} dx \dots (67);$$

remplaçant $\frac{d^2X}{dx^2}$ par $\frac{d^3X}{dx^3}$ et opérant de même, nous obtiendrons

$$\int x^2 \frac{d^2X}{dx^2} dx \text{ ou } \int \frac{d^2X}{dx^2} \cdot x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{d^3X}{dx^3} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^3X}{dx^3} dx \dots (68),$$

et ainsi de suite.

Substituant la valeur du premier membre de l'équation (67) dans l'équation (66), et portant ensuite, dans le résultat, celle du premier membre de l'équation (68), nous obtiendrons

$$\int X dx = Xx - \frac{dX}{dx} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.} + \text{const.}$$

De la quadrature des courbes.

348. Soit s (fig. 51) l'aire ABMP d'une courbe plane; Fig. 51. si l'abscisse $AP = x$ devient $AP' = x + h$, l'aire s deviendra

$$\text{aire ABM'P'} = s + \frac{ds}{dx} h + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

on aura donc

$$\text{aire mixtiligne PMM'P'} = \frac{ds}{dx} h + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

cette aire est comprise entre les deux rectangles PM' et $P'M$, dont il est facile d'avoir les expressions analytiques :

$$\text{le rectangle } PM' = P'M' \times PP' = f(x+h) \cdot h,$$

$$\text{le rectangle } P'M = PM \times PP' = f(x) \cdot h;$$

le rapport de ces rectangles est

$$\frac{f(x+h) \cdot h}{fx \cdot h} = \frac{f(x+h)}{fx};$$

dans le cas de la limite, ce rapport se réduit à

$$\frac{fx}{fx} = 1.$$

Or, la surface mixtiligne $PMM'P'$ étant comprise entre les deux rectangles, diffère moins du rectangle $P'M$ que le rectangle PM' ; donc, si dans le cas de la limite on a $\frac{PM'}{P'M} = 1$, à plus forte raison l'unité sera la limite du rapport

$$\frac{\text{aire } PMM'P'}{\text{rectangle } P'M}.$$

En remplaçant les termes de ces rapports par leurs expressions analytiques, on aura

$$\frac{\frac{ds}{dx} h + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}}{fx \cdot h} = \frac{\frac{ds}{dx} + \frac{d^2s}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{fx};$$

on passera à la limite en faisant $h = 0$, et l'on trouvera $\frac{ds}{dx fx} = 1$, d'où $ds = fx \cdot dx$; et en mettant pour fx sa valeur, on aura

$$ds = y dx \dots (69).$$

349. On peut aussi déterminer la différentielle de l'aire d'une courbe, par la méthode des infiniment petits, de la manière suivante (fig. 59) :

Fig. 59.

$$\text{trapeze } PMM'P' = \frac{PM + PM'}{2} \times PP' = \frac{y + (y + dy)}{2} \times dx = y dx + \frac{dx dy}{2};$$

rejetant xdy comme infiniment petit du second ordre, il reste ydx pour la différentielle.

350. Pour première application, cherchons (fig. 52) l'aire d'une portion BMP de parabole. Soit $y^2 = mx$ l'équation de cette parabole, dont l'origine est B; on trouve, en différenciant, $2ydy = m dx$; donc $dx = \frac{2y}{m} dy$, et par conséquent $ydx = \frac{2y^2}{m} dy$: intégrant, on a

$$\int \frac{2y^2}{m} dy = \frac{2y^3}{3m} + C \dots (70).$$

Pour déterminer la constante, j'observe que lorsque $y = 0$, l'intégrale, qui exprime la surface cherchée, est nulle en même temps. Cette hypothèse réduit l'équation (70) à $0 = 0 + C$; donc

$$\int ydx = \frac{2y^3}{3m} = \frac{2y}{3m} \cdot y^2 = \frac{2y}{3m} \times mx = \frac{2}{3} xy.$$

351. Nous avons maintenant des observations importantes à faire sur la détermination de la constante: pour cela, résolvons le même problème en prenant la parabole dont l'équation est

$$y^2 = m + nx \dots (71).$$

L'origine des abscisses ici n'est plus au sommet de la courbe; car, en faisant $y = 0$, l'équation (71) donne $x = -\frac{m}{n}$; et comme cette abscisse doit se terminer au point B (fig. 53) où $y = 0$, on portera $\frac{m}{n}$ de B en A, et le point A sera l'origine. Cela posé, en opérant comme précédemment, on trouvera

$$2ydy = n dx; \text{ donc } ydx = \frac{2y^2}{n} dy \text{ et } \int ydx = \frac{2y^3}{3n} + C \dots (72).$$

Pour déterminer la constante, j'observe que la surface ADMP (fig. 53), qui représente ici l'intégrale, doit être nulle lorsque l'ordonnée MP coïncide avec AD; or, AD étant l'ordonnée qui passe par l'origine A où l'abscisse $x = 0$, l'équation (71) nous donnera, dans cette hypothèse,

y ou $DA = \sqrt{m}$; faisant donc $\int y dx = 0$ et $y = \sqrt{m}$,

ces valeurs réduiront l'équation (72) à $0 = \frac{2}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n} + C$; d'où

l'on déduit $C = -\frac{2}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n}$, et par conséquent l'intégrale cherchée est

$$\int y dx = \frac{2}{3} \frac{y^3}{n} - \frac{2}{3} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{n} = \text{aire ADMP.}$$

352. Dans ce qui précède, nous avons tiré de l'équation de la courbe la valeur de dx , pour la substituer dans la formule $y dx$, et intégrer ensuite. Nous aurions pu opérer autrement, en mettant dans cette expression la valeur de y plutôt que celle de dx ; car, pour obtenir l'intégrale, il suffit que la différentielle proposée ne contienne qu'une variable; ainsi on choisira la substitution qui exigera le moins de calculs.

353. Une intégrale telle que $\int f(x) dx$, peut toujours représenter l'aire d'une courbe dont l'équation serait $y = f(x)$: en effet, cette équation étant donnée, si l'on substitue la valeur de y dans la formule $y dx$, on aura $\int f(x) dx$ pour la surface de cette courbe. C'est pourquoi lorsqu'un problème nous a conduit à intégrer une fonction d'une seule variable, on dit que ce problème est ramené aux quadratures.

354. Soit X une fonction de x , et supposons qu'en intégrant $X dx$ on ait obtenu

$$\int Xdx = Fx + C \dots (73),$$

cette intégrale, dans laquelle la constante C n'est pas encore déterminée, porte le nom d'*intégrale indéfinie générale*, ou plus simplement d'*intégrale indéfinie*, et elle est complète lorsqu'elle renferme la constante arbitraire C .

355. Si, par une hypothèse, on détermine cette constante C , si l'on suppose, par exemple, que $\int Xdx$ doive s'évanouir lorsque $x = a$, l'équation (73) donne, dans ce cas, $0 = Fa + C$; donc $C = -Fa$, et l'équation (73) devient

$$\int Xdx = Fx - Fa;$$

cette intégrale $Fx - Fa$ est alors une intégrale particulière; et l'on voit que le nombre des intégrales particulières d'une expression différentielle est illimité, puisqu'on peut établir une infinité d'hypothèses différentes sur la constante.

356. Lorsqu'on fait l'hypothèse de l'intégrale nulle et de $x = a$, c'est admettre qu'en prenant (fig. 54) une abscisse $AB = a$, la surface soit comprise entre la limite BD et la limite indéfinie MP qui correspond à $AP = x$; donc l'opération par laquelle nous déterminons une intégrale particulière, est la même que celle qui fixerait la position de la limite BD , depuis laquelle on compte l'intégrale. La seconde limite PM sera fixée à son tour invariablement, si nous donnons à x une valeur déterminée b ; alors l'intégrale particulière $\int ydx = Fx - Fa$, deviendra

$$\int ydx = Fb - Fa \dots (74),$$

et la surface $BDMP$ ne sera plus arbitraire. Dans ce cas, l'intégrale porte le nom d'*intégrale définie*, et l'on dit qu'elle est prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

357. Cherchons maintenant l'intégrale définie de $x^m dx$; nous sommes donc censés connaître deux valeurs a et b ;

qui satisfont à l'intégrale indéfinie,

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \dots (75).$$

Supposons que la première corresponde à $\int y dx = 0$; on aura

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C = 0;$$

et l'intégrale particulière sera

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Nous ferons ensuite $x = b$; et nous aurons pour l'intégrale définie

$$\int x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

358. On parvient aussi à cette intégrale en faisant successivement $x = a$ et $x = b$ dans l'intégrale indéfinie, et l'on a

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{et} \quad \frac{b^{m+1}}{m+1} + C;$$

on retranchera ensuite le premier résultat du second; mais, en prenant cette différence, il faut toujours avoir soin que la partie soustraite soit la valeur de la fonction de x à l'origine de l'intégrale.

Fig. 55. 359. Pour troisième application, déterminons l'aire d'un triangle rectangle ABC (fig. 55): l'équation de la droite AC étant $y = ax$, en mettant cette valeur de y dans la formule $y dx$, on obtient $ax dx$; donc

$$\int y dx = \int ax dx = \frac{ax^2}{2} + C;$$

la surface étant nulle quand $x = 0$, la constante est égale

à zéro, donc

$$\text{aire } ABC = \frac{ax^2}{2} = \frac{x}{2} \times ax = \frac{xy}{2}.$$

360. Si dans la formule ydx on met la valeur de y , tirée de l'équation du cercle, on trouvera $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$ pour l'expression de l'aire du cercle. Nous avons vu, art. 282, que cette intégrale avait pour valeur

$$\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\sin = \frac{x}{a} \right) + C.$$

La partie $\frac{1}{2} a^2 \arcsin \left(\sin = \frac{x}{a} \right)$ ne pouvant se déterminer qu'en supposant connu le rapport du diamètre à la circonférence (*), on voit que l'intégration de $dx \sqrt{a^2 - x^2}$ ne peut conduire à la solution du problème de la quadrature du cercle. Il en est de même de la quadrature de l'ellipse qui dépend de

$$\frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si l'on compare ces deux expressions, on en tirera la proportion

$$\text{aire ellipse} : \text{aire cercle} :: \frac{b}{a} \int dx \sqrt{a^2 - x^2} : \int dx \sqrt{a^2 - x^2},$$

ou

$$\text{aire ellipse} : \text{aire cercle} :: \frac{b}{a} : 1,$$

d'où l'on tire

$$\text{aire ellipse} = \frac{b}{a} \times \text{aire cercle} = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

(*) Si, par exemple, $x = \frac{1}{6} a$, j'ai $\frac{x}{a} = \frac{1}{6}$, et j'opère comme dans l'art. 278, pour déterminer l'arc correspondant.

De la rectification des courbes.

361. Rectifier une courbe, c'est obtenir une droite égale à un arc de courbe. Nous avons trouvé, art. 159, que la différentielle d'un arc de courbe avait pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots (76);$$

une équation entre deux variables x et y étant donnée, si l'on veut rectifier la courbe à laquelle elle appartient, on différenciera cette équation, et on en tirera la valeur de dx ou de dy , qu'on substituera dans l'expression (76); alors le radical ne contiendra plus qu'une variable, et si l'on peut obtenir l'intégrale, la courbe sera rectifiable.

362. Prenons, pour exemple, la courbe (*) dont l'équation est $y^3 = nx^2$, trouvée art. 165; cette équation étant différenciée, nous donnera

$$3y^2 dy = 2nxdx,$$

d'où nous tirerons

$$dx = \frac{3y^2 dy}{2nx} \text{ et } dx^2 = \frac{9}{4} \frac{y^4}{n^2 x^2} dy^2 = \frac{9}{4} \frac{y^4}{ny^3} dy^2 = \frac{9}{4} \frac{y}{n} dy^2;$$

substituant, on a

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1\right) dy^2} = dy \sqrt{\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1};$$

dy étant la différentielle de l'expression qui est sous le ra-

(*) Elle porte le nom de *seconde parabole cubique*. Cette équation, ainsi que celle de la parabole ordinaire, ne sont que des cas particuliers de l'équation générale $y^m = ax^n$; c'est pourquoi cette équation est appelée *l'équation de la parabole de tous les ordres*.

On a aussi regardé l'équation $xy = a$ de l'hyperbole entre ses asymptotes, comme un cas particulier de l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$, qui est appelée pour cette raison, *l'équation de l'hyperbole de tous les ordres*.

dical, à une constante près, nous ferons, article 271, $\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1 = z$, d'où l'on tire $dy = \frac{4n}{9} dz$; substituant, nous aurons

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} z^{\frac{1}{3}} dz;$$

donc

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9} \frac{z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{8n}{27} z^{\frac{2}{3}} + C,$$

ou, en remettant la valeur de z ,

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8n}{27} \left(\frac{9}{4} \frac{y}{n} + 1 \right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Pour déterminer la constante, on voit, d'après la nature de l'équation de la courbe, qu'à l'origine des abscisses y est 0; ainsi, en supposant que l'intégrale soit nulle en ce point, on a

$$0 = \frac{8n}{27} + C; \text{ donc } C = -\frac{8n}{27},$$

et par conséquent

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{8n}{27} \sqrt{\left[\frac{9}{4} \left(\frac{x}{n} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right]} - \frac{8n}{27}.$$

* Si $x = a$, l'arc s , compris entre les limites $x = 0$ et $x = a$, sera

$$s = \frac{8n}{27} \sqrt{\left[\frac{9}{4} \left(\frac{a}{n} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right]} - \frac{8n}{27}.$$

363. L'équation de la cycloïde, art. 200, donne $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{2ay - y^2}$; substituant cette valeur dans la formule (76), nous trouverons

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dy^2 + \frac{y^2 dy^2}{2ay - y^2}} = dy \sqrt{\frac{2ay}{2ay - y^2}} = dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}} \\ &= (2a)^{\frac{1}{2}} \times \frac{dy}{(2a - y)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Comme dy exprime la différentielle de l'expression qui est sous la parenthèse, multipliée par -1 , nous ferons, art. 271, $2a - y = z$, et nous aurons

$$dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -(2a)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Cette équation étant intégrée, donne

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2(2a)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{2az} + C;$$

ou, en restituant la valeur de y ,

$$\int dy \sqrt{\frac{2a}{2a-y}} = -2\sqrt{2a(2a-y)} + C \dots (77).$$

Pour déterminer la constante, nous prendrons l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse quand $y = 2a$; dans cette hypothèse, l'équation (77) se réduira à $0 = 0 + C$, ce qui montre qu'il n'y a point de constante à ajouter; alors l'arc de cycloïde s'étendra depuis le point B (fig. 57), où $y = 2a$, jusqu'au point M, dont les coordonnées sont x et y . La valeur absolue de l'arc MB étant $2\sqrt{2a(2a-y)}$, nous remarquerons que $BE = 2a - y$; donc $2\sqrt{2a(2a-y)} = 2\sqrt{BD \times BE} = 2BG$; d'où il suit que l'arc de cycloïde MB est égal au double de la corde GB; par conséquent, arc $AB = 2BD$.

Fig. 57.

De la détermination de l'aire des solides de révolution.

Fig. 51. 364. Si une courbe BC (fig. 51), tracée sur un plan, fait une révolution autour de l'axe AX , elle engendrera un solide de révolution. Cherchons la différentielle de l'aire engendrée par cette courbe. Pour cet effet, soient $AP = x$, $PM = y$, $PP' = h$, et par conséquent

$$PM = fx = y,$$

$$P'M' = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

Dans ce mouvement de rotation, les ordonnées MP et M'P'

décrivant des cercles inégaux, ces cercles seront les bases d'un cône tronqué, dont la corde MM' sera le côté. L'aire de ce cône tronqué aura pour expression

$$\frac{\text{circ. } PM + \text{circ. } P'M'}{2} \times \text{corde } MM'.$$

En représentant par $1 : \pi$ le rapport du diamètre à la circonférence, l'expression précédente deviendra

$$\frac{2\pi PM + 2\pi P'M'}{2} \times \text{corde } MM' = \pi(PM + P'M') \times \text{corde } MM';$$

et en mettant, pour les ordonnées PM et $P'M'$, leurs valeurs analytiques, on aura

$$\text{aire cône tronqué } MM' = \pi \left(2y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} \text{ etc.} \right) \text{corde } MM',$$

d'où l'on tirera, en divisant,

$$\frac{\text{aire cône tronqué } MM'}{\text{corde } MM'} = \pi \left(2y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \right).$$

Si nous représentons maintenant par u l'aire engendrée par le mouvement de rotation de l'arc MM' , et par s cet arc de courbe; comme en diminuant h , cet arc tend à se confondre avec sa corde, le premier membre de l'équation précédente devra être remplacé, dans le cas de la limite, par $\frac{du}{ds}$; et le second se réduisant alors à $2\pi y$, nous obtiendrons

$$\frac{du}{ds} = 2\pi y,$$

et par conséquent $du = 2\pi y ds$; et en mettant pour ds sa valeur trouvée art. 159, on aura enfin

$$du = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots (78)$$

365. Par les infiniment petits on aurait considéré l'élément de la surface de révolution, comme celle d'un cône tronqué, engendré par la rotation du trapèze élémentaire Fig. 59. $MPP'M'$ (fig. 59) autour de PP' ; ce cône tronqué aurait pour expression

$$\text{cir.} \left(\frac{PM + P'M'}{2} \right) \times MM' = \pi(2y + dy)ds = 2\pi yds + \pi dyds;$$

supprimant le terme $\pi dyds$, comme infiniment petit du second ordre, il resterait

$$2\pi yds = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ élément d'une surface de révolution.}$$

366. Pour première application, prenons l'aire du parabolôide de révolution, qui est le solide engendré par la Fig. 60. révolution d'un arc AM de parabole (fig. 60) autour de son axe : l'équation de la parabole $y^2 = px$ donne

$$dx = \frac{2ydy}{p} \quad \text{et} \quad dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2}.$$

Cette valeur étant substituée dans la formule $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, la réduit à

$$2\pi y \sqrt{\left(\frac{4y^2 + p^2}{p^2} \right) dy^2} = \frac{2\pi}{p} ydy \sqrt{4y^2 + p^2}.$$

ydy étant la différentielle de la quantité qui est sous le radical, à une constante près, je fais, art. 271, $4y^2 + p^2 = z$, et en différenciant je trouve $ydy = \frac{dz}{8}$; substituant et intégrant, j'obtiens

$$\begin{aligned} \int \frac{2\pi}{p} ydy \sqrt{4y^2 + p^2} &= \int \frac{\pi}{4p} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{\pi}{6} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{p} + C \\ &= \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Je détermine la constante en supposant que l'intégrale soit

nulle lorsque $y = 0$, ce qui réduit l'équation précédente à.

$$0 = \frac{\pi}{6} p^3 + C, \text{ ce qui donne } C = -\frac{\pi p^3}{6};$$

et en supposant que l'intégrale soit prise depuis $y = 0$ jusqu'à $y = b$, l'intégrale définie sera

$$\frac{\pi}{6p} [(4b^3 + p^3)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$

367. Pour seconde application, évaluons l'aire de la sphère. Cette surface courbe étant engendrée par la révolution de la demi-circonférence autour du diamètre, soit $x^2 + y^2 = a^2$ l'équation du cercle; en différenciant nous trouverons $x dx + y dy = 0$; donc

$$dy = -\frac{x dx}{y} \text{ et } dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{y^2};$$

substituant cette valeur dans la formule (78), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int 2\pi y \sqrt{\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)} dx^2 &= \int 2\pi dx \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \int 2\pi a dx = 2\pi ax + C \dots (79). \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante, nous prendrons l'intégrale à partir du point A (fig. 61); et puisque l'origine des abscisses est au centre, nous supposerons l'intégrale nulle lorsque $x = -a$; cette hypothèse réduira l'équation (79) à

$$0 = -2\pi a^2 + C; \text{ donc } C = 2\pi a^2;$$

substituant cette valeur dans l'équation (79), nous aurons

$$\int 2\pi a dx = 2\pi(ax + a^2).$$

Prenons maintenant l'intégrale définie entre les limites

Fig. 61.

$x = -a$ et $x = a$; il faudra changer x en a dans la formule précédente, et nous obtiendrons, pour la surface de la sphère,

$$\int 2\pi a dx = 2\pi(2a^2) = 4\pi a^2.$$

368. On peut aussi trouver l'aire du cylindre droit; car cette surface étant engendrée par la révolution du rectangle

Fig. 62. AD (fig. 62), autour de l'axe AB, soient $AB = a$, $CA = b$; l'équation de la droite CD sera $y = b$; donc $dy = 0$. En substituant ces valeurs dans la formule (78), on la réduit à $2\pi b dx$; et en intégrant on a

$$\int 2\pi b dx = 2\pi bx + C.$$

Si l'on prend l'intégrale définie entre les limites $x = 0$ et $x = a$, on trouve pour l'aire du cylindre

$$2\pi ba = 2\pi b \times a = \text{circonférence de la base} \times \text{hauteur}.$$

A l'égard de l'aire du cône, ce solide étant engendré par la rotation du triangle rectangle ABC (fig. 55), autour de l'axe AB, soient $AB = a$, $CB = b$; l'équation de AC sera $y = \frac{b}{a}x$; cette équation donne, par la différenciation,

$$dy = \frac{b}{a} dx \quad \text{et} \quad dy^2 = \frac{b^2}{a^2} dx^2.$$

Les valeurs de y et de dy^2 étant substituées dans la formule (78), on a

$$\int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int 2\pi \frac{bx}{a^2} dx \sqrt{a^2 + b^2} = \pi \frac{bx^2}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2} + C;$$

et en prenant l'intégrale définie entre les limites $x = 0$ et $x = a$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{aire du cône} &= \pi b \sqrt{a^2 + b^2} = 2\pi b \times \frac{AC}{2} \\ &= \text{circonférence BC} \times \frac{AC}{2}. \end{aligned}$$

De la cubature des solides de révolution.

369. Soit v le volume engendré par la révolution de l'aire mixtiligne ABPM autour de l'axe AX (fig. 51); si l'abscisse AP = x devient AP' = $x + h$, le solide de révolution s'accroîtra du corps engendré par la rotation du trapèze mixtiligne PMM'P' autour du même axe. Le volume engendré par ABMP étant une fonction de x , puisqu'il augmente ou diminue en même temps que x , le volume engendré par ABM'P' sera une fonction de $x + h$, et aura pour expression

Fig. 51.

$$v + \frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.};$$

par conséquent, si on en retranche le volume engendré par ABMP, on aura

$$\frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

pour le volume engendré par PMM'P'. Or, ce volume étant compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP' et M'P, différera moins de l'un de ces cylindres que ces cylindres ne diffèrent entre eux; donc, si l'on peut prouver que, dans le cas de la limite, le rapport de ces cylindres est l'unité, il en sera à plus forte raison de même du rapport du corps décrit par PMM'P', à l'un de ces cylindres. Cela posé, on a évidemment

le cylindre décrit par PM' = $\pi [f(x + h)]^2 h$,

le cylindre décrit par P'M = $\pi (fx)^2 h$;

donc le rapport de ces cylindres est exprimé par

$$\frac{[f(x + h)]^2}{(fx)^2}.$$

En faisant $h=0$, on voit que ce rapport se réduit à l'unité; il en sera donc de même du rapport du volume engendré par $PMM'P'$ à celui du cylindre décrit par MP' . Or, ce rapport étant représenté par

$$\frac{\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{\pi(fx)^2 h} = \frac{\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{\pi(fx)^2},$$

on a, dans le cas de la limite,

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\pi(fx)^2} = 1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dv}{dx} = \pi(fx)^2 = \pi y^2,$$

et enfin,

$$dv = \pi y^2 dx \dots (80).$$

370. On parviendrait au même résultat par la considération des infiniment petits : car on peut concevoir le volume **MON** (fig. 64) comme partagé en tranches infiniment minces, par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution; l'une de ces tranches, qui est l'élément du corps, peut être considérée comme un cylindre dont la base est le cercle décrit par y , et dont la hauteur est égale à l'épaisseur ab représentée par dx ; par conséquent cet élément a pour expression $\pi y^2 dx$.

371. Appliquons cette formule à la détermination du volume de l'ellipsoïde allongé, qui est le volume engendré par la révolution de l'ellipse autour de son grand axe : l'équation de l'ellipse rapportée au centre étant

$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$, on substituera cette valeur de y^2 dans la formule $\pi y^2 dx$, et l'on aura

$$\pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx;$$

et en intégrant, on trouvera

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + C \dots (81).$$

Supposons que l'intégrale soit nulle au point A (fig. 56), Fig. 56. où $x = -a$; nous aurons

$$C = \pi \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2}{3} a^3;$$

et en substituant cette valeur de C, l'équation (81) devient

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} a^3 \right).$$

Faisons ensuite $x = a$, pour avoir l'intégrale définie comprise entre les limites $x = -a$ et $x = +a$; nous obtenons

$$\int \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3 :$$

tel sera le volume de l'ellipsoïde allongé. Si $b = a$, ce volume deviendra celui de la sphère, et aura pour expression

$$\frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^2 \times 2a = \frac{2}{3} \text{ du cylindre circonscrit.}$$

Déterminons encore le volume du parabolôïde de révolution. Pour cet effet, prenons la parabole de tous les ordres pour génératrice; l'équation de cette parabole nous donnera

$$y = ax^{\frac{n}{m}};$$

substituant cette valeur dans la formule (80), nous ob-

tiendrons

$$v = \int \pi a^2 x^{\frac{2n}{m}} dx = \frac{m\pi a^2 x^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m} + C.$$

Pour déterminer la constante, nous supposons que le volume soit nul à l'origine ou $x=0$; alors nous aurons $C=0$. Dans le cas de la parabole ordinaire, $m=2$, $n=1$; donc

$$v = \pi a^2 \frac{x^3}{2} = \pi a^2 x \frac{x}{2} = \pi y^2 \cdot \frac{x}{2}.$$

Fig. 65. Or, πy^2 étant l'aire du cercle dont PM (fig. 65) est le rayon, l'expression $\frac{1}{2} \pi y^2 \cdot x$ représente la moitié du cylindre décrit par APMB autour de l'axe des abscisses : donc le volume de la parabole ordinaire est la moitié de celui du cylindre circonscrit. (*Note cinquième*).

De la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, au moyen des intégrales doubles.

372. Proposons-nous de déterminer l'expression de la différentielle d'un volume terminé par une surface dont l'équation est donnée. Soit Fig. 85. EDCB (fig. 85) un volume compris dans l'angle des axes coordonnés Ax, Ay et Az, et terminé par un plan DCG, parallèle à celui des yz; si x devient $x+h$, ce volume s'accroîtra d'une tranche DD'CC', dont l'épaisseur sera h; et en nommant V' ce que devient alors le volume, on aura

$$V' = V + \frac{dV}{dx} h + \frac{d^2V}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3V}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

et la tranche DD'CC'FG sera représentée par

$$V' - V = \frac{dV}{dx} h + \frac{d^2V}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3V}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.};$$

dans le cas de la limite, cette équation nous donne

$$\frac{V' - V}{h} = \frac{dV}{dx} \dots (81).$$

Nous avons déjà fait assez connaître les deux méthodes des limites et des infiniment petits, pour que nous ne craignons pas d'employer ici quelques considérations tirées de cette dernière afin de jeter plus de jour sur cette matière; on pourra ensuite, sans difficulté, revenir aux limites.

L'équation (81) nous montre que $\frac{dV}{dx}$ est le coefficient différentiel qui détermine le volume; par conséquent la différentielle est $\frac{dV}{dx} dx$: cette différentielle n'est autre chose qu'une tranche infiniment mince DD'CC'FG, dont dx serait l'épaisseur. Si dans cette tranche on fait varier y , elle deviendra infiniment mince dans le sens des y , comme elle l'est déjà dans celui des x , et, par conséquent, elle se réduira à un petit prisme élémentaire ID'KF, dont z sera la hauteur, et qui aura pour base... FGKL = $dx dy$; nous aurons donc

$$\frac{dV}{dx dy} dx dy = z dx dy,$$

équation qui nous donnera

$$\frac{dV}{dx dy} = z;$$

remplaçant z par sa valeur tirée de l'équation de la courbe, cette valeur sera, en général, une fonction de x et de y , que nous représenterons par M , et nous aurons

$$\frac{dV}{dx dy} = M.$$

373. Pour déterminer le volume, au moyen de cette expression, écrivons-la ainsi :

$$\frac{d}{dy} \frac{dV}{dx} dy = M dy;$$

la notation qui est dans le premier membre, nous montre qu'on est parvenu à l'expression de la différentielle de $\frac{dV}{dx}$, en regardant y comme variable et x comme constant; la même hypothèse devra donc avoir lieu lorsque par une opération inverse nous intégrerons; mais alors x étant traité comme une quantité constante, pourra se trouver dans la constante qu'on doit ajouter à l'intégrale. Nous regarderons donc, en général, cette constante comme une fonction de x ; et en la représentant par X , nous aurons, par une première intégration,

$$\frac{dV}{dx} = \int M dy + X \dots (82).$$

Pour exécuter la seconde intégration, nous remarquerons que la notation $\frac{dV}{dx}$ montre que la différentielle du volume doit être prise en regardant x comme la seule variable; nous devons donc conserver la même hypothèse dans l'intégration; ainsi, en représentant par Y la fonction de y , qui remplacera la constante, et en multipliant préliminairement par dx , pour changer le coefficient différentiel en différentielle, nous trouverons

$$V = \int dx (\int M dy + X) + Y.$$

374. L'ordre des intégrations étant arbitraire, on peut indiquer ainsi les opérations que nous venons d'exécuter :

$$V = \iint s dy dx. \dots (83).$$

375. Pour donner une application de cette méthode, proposons nous de trouver le volume de la sphère: l'équation de la sphère étant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on tirera de cette équation la valeur de z , et la mettant dans la formule (83), on aura

$$\iint s dy dx \text{ ou } \int dy \int s dx = \int dy \int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \dots (84);$$

regardant y comme constant, et appelant A^2 la différence $r^2 - y^2$, qui est essentiellement positive; puisque r surpasse toujours y , nous trouverons d'abord, en intégrant par rapport à x ,

$$\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \int dx \sqrt{A^2 - x^2};$$

or, d'après l'article 282, nous avons

$$\int dx \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{A^2 - x^2} + \frac{1}{2} A^2 \arcsin \left(\frac{x}{A} \right) + Y,$$

et en mettant la valeur de A^2 , on trouve

$$\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{2} (r^2 - y^2) \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right) + Y \dots (85).$$

Fig. 86.

Pour prendre l'intégrale définie, observons que la constante y étant représentée par AP (fig. 86), tous les points que nous allons déterminer par cette intégrale, doivent avoir leurs projections sur la direction de PM; car l'un quelconque de ces points ayant la variable x pour ordonnée, aura AQ et QN pour autres coordonnées, et alors QN sera

égal à la constante AP, et l'autre coordonnée AQ, dirigée dans le sens des x , pourra être remplacée par PN; de sorte qu'en comptant les x sur la droite PM, les y seront constans; prenant donc l'intégrale de P en M, c'est-à-dire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = PM = \sqrt{r^2 - y^2}$, nous substituerons successivement à x , dans le second membre de l'équation (85), les valeurs $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ et $x = 0$, et retranchant le second résultat du premier, nous trouverons, pour l'intégrale définie,

$$\frac{1}{2} (r^2 - y^2) \text{ arc} (\sin = 1);$$

et observant que l'arc dont le sinus est l'unité, vaut le quart de la circonférence représentée, suivant l'usage, par 2π , cette intégrale définie devient

$$\frac{1}{2} (r^2 - y^2) \times \frac{\pi}{2};$$

cette valeur de $\int dx \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ étant substituée dans l'équation (84), on aura

$$\iint z dx dy = \frac{1}{4} \pi \int (r^2 - y^2) dy = \frac{1}{4} \pi \left(r^2 y - \frac{y^3}{3} \right) + X;$$

et, en intégrant depuis $y = 0$ jusqu'à $y = r$, on trouvera

Fig. 86.

$$\iint z dx dy = \frac{\pi}{4} \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{2\pi r^3}{12} = \frac{1}{6} \pi r^3.$$

Tel sera le volume qui reposera sur le quart de cercle BAC, et qui sera par conséquent le huitième de la sphère, (*Note quatrième*).

De la quadrature des surfaces courbes, au moyen des intégrales doubles.

376. Soit (fig. 85) EDCB = S, une surface courbe, et supposons que Fig. 85. l'abscisse x s'accroisse de h ; cette surface deviendra $S + \frac{dS}{dx} h + \frac{d^2S}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}$; et, dans le cas de la limite, le rapport de l'accroissement de la fonction S à celui de la variable x , se réduira à $\frac{dS}{dx}$; d'où l'on conclura que la différentielle est $\frac{dS}{dx} dx$: cette différentielle sera représentée, dans la figure, par la bande DD'CC' d'une largeur infiniment petite. Si dans DD'CC' on fait maintenant varier y , et que y devienne encore infiniment petit, la bande DD'CC' se réduira à DD'II', et aura pour expression $\frac{d^2S}{dx dy} dx dy$.

Or, cette surface DD'II' étant infiniment petite, on peut la considérer

comme plane; par conséquent, en la multipliant par le cosinus de son inclinaison γ sur le plan des xy , elle égalera $dx dy$; (note cinquième) nous aurons donc

Fig. 85.

$$DD' \cos \gamma = dx dy,$$

ou

$$\frac{dS}{dx dy} dx dy \cos \gamma = dx dy;$$

d'où nous tirerons

$$\frac{dS}{dx dy} = \frac{1}{\cos \gamma}.$$

Pour déterminer la valeur de γ , soit $Ax + By + Cz + D = 0$, l'équation du plan tangent; nous savons que ce plan fait avec le plan des xy , un angle qui est donné par l'équation (note sixième)

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

Si nous considérons donc $Ax + By + Cz + D = 0$ comme l'équation du plan tangent au point de la surface courbe dont la projection est $dx dy$, nous aurons

$$\frac{dS}{dx dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \dots (86).$$

Pour déterminer les coefficients différentiels qui entrent dans cette expression, nous remarquerons qu'au point que l'on considère; le plan tangent se confond avec la surface courbe, dont nous représenterons l'équation par $z = f(x, y)$; par conséquent, les valeurs de $\frac{dz}{dy}$ et de $\frac{dz}{dx}$, qui entrent dans l'expression de $\cos \gamma$, doivent être regardées, art. 75, comme les mêmes que celles que l'on déduirait immédiatement de l'équation $z = f(x, y)$. Ayant donc fait ces substitutions, on intégrera ensuite deux fois l'équation (86), multipliée par $dx dy$, opération que nous indiquerons, comme précédemment, par un double signe d'intégration, et nous aurons

$$S = \iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

377. Pour donner une application de cette formule, cherchons à déterminer l'expression de la surface de la sphère. Son équation étant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots (87),$$

nous la différencierons, et nous trouverons, après avoir divisé par 2,

$$x dx + y dy + z dz = 0;$$

d'où nous tirerons

$$dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy;$$

par conséquent

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z};$$

Substituant ces valeurs dans l'expression $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, nous la changerons en

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{1}{z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r}{z},$$

et par conséquent nous aurons

$$\iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \iint \frac{r dx dy}{z};$$

mettant la valeur de z , on aura

$$\iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \iint \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

378. Pour effectuer les intégrations indiquées, nous écrirons

$$\iint \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \int r dy \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \dots (88),$$

et par là, nous marquerons que nous devons commencer par intégrer l'expression $\frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$, en considérant x comme la seule variable; faisant donc, comme précédemment,

$$r^2 - y^2 = A^2,$$

et intégrant, d'après l'art. 274, nous aurons, en ajoutant une constante fonction de y ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{A} + Y;$$

mettant la valeur de A , et prenant ensuite l'intégrale définie depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, il viendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}} \right) = \frac{1}{4} \text{ circonférence} = \frac{\pi}{2}.$$

cette valeur étant substituée dans l'équation (88), nous donnera

$$\iint \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \int \frac{\pi}{2} r dy = \frac{1}{2} \pi r y + X;$$

en appelant X la constante, qu'on doit regarder comme une fonction de x ; prenant ensuite l'intégrale définie entre les limites $y = 0$ et $y = r$, nous trouverons enfin

$$\iint \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Telle sera la partie de la surface sphérique comprise dans l'angle formé par les axes des coordonnées rectangulaires x, y, z , c'est-à-dire la huitième partie de la sphère.

De l'intégration des fonctions de deux variables.

379. Les deux méthodes principales que l'on emploie pour parvenir à intégrer les équations différentielles, qui contiennent deux ou un plus grand nombre de variables, consistent, 1°. dans la séparation des variables, pour pouvoir leur appliquer ensuite les procédés usités pour une seule variable; 2°. dans la recherche des facteurs propres à rendre une différentielle exacte. C'est pourquoi nous allons nous occuper successivement de ces deux méthodes.

De la séparation des variables, de l'équation linéaire du premier ordre, et des propriétés des fonctions homogènes.

380. Nous avons vu que toute différentielle, pour être intégrable, devait être de la forme $\phi x dx$; ainsi, on serait arrêté dans l'intégration d'une équation, si elle renfermait des termes tels que $y^2 dx$, $xy dx$, $\frac{dx}{y}$, etc. Cependant il ne faudrait pas conclure que l'intégration est impraticable; car, si par des opérations algébriques, on pouvait faire en sorte

que chaque terme ne contient plus qu'une seule variable, l'intégration pourrait s'effectuer ensuite. L'équation $xdy + ydx = 0$ est dans ce cas. En effet, si on divise cette équation par xy , elle devient

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0;$$

et en intégrant, elle donne $\log y + \log x = C$; et en représentant par A le nombre dont C est le logarithme, on peut écrire $\log y + \log x = \log A$, et par conséquent

$$\log xy = \log A;$$

passant aux nombres, on a

$$xy = A.$$

381. Soit l'équation plus générale

$$\phi x \cdot dy + Fy \cdot dx = 0;$$

pour séparer les variables on divisera cette équation par $\phi x \cdot Fy$, et l'on trouvera

$$\frac{dy}{Fy} + \frac{dx}{\phi x} = 0,$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

382. Pour en donner un exemple, proposons-nous d'intégrer

$$(1 + x^2) dy = dx \sqrt{y};$$

en divisant par $(1 + x^2) \sqrt{y}$, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1 + x^2};$$

et en intégrant cette équation, on obtiendra

$$2\sqrt{y} = \text{arc tang } x + C.$$

383. On séparerait encore les variables par la division

dans la formule

$$\phi x . F y . dx + \phi' x . F' y . dy = 0 ;$$

pour cela, il suffirait de diviser par $F y . \phi' x$, et l'on aurait

$$\frac{\phi x}{\phi' x} dx + \frac{F' y}{F y} dy = 0.$$

Ce procédé est applicable à l'équation

$$x^2 y dx + (3y + 1) dy \sqrt{x^3} = 0,$$

car, si on la divise par $y \sqrt{x^3}$, on obtient

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}} dx + \frac{(3y + 1)}{y} dy = 0.$$

384. L'intégration pourrait encore s'effectuer si la proposée renfermait plus de deux variables, et qu'on pût la ramener à ne contenir dans chaque membre que des différentielles dont on connaît l'intégrale, comme seraient, par exemple, les fonctions

$$\frac{y dx - x dy}{y^2}, \quad x dy + y dx, \text{ etc.,}$$

qui ont respectivement pour intégrales $\frac{x}{y}$ et xy .

385. Il est une équation importante, dans laquelle la séparation des variables s'effectue par un procédé très ingénieux, c'est la suivante :

$$dy + P y dx = Q dx \dots (89),$$

où P et Q sont des fonctions de x .

Pour cet effet, on égalera y au produit des deux indéterminées X et z , ce qui donnera

$$y = zX, \quad dy = z dX + X dz;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (89), on la transformera en

$$zdX + X(dz + Pzdx) = Qdx.$$

X étant arbitraire, on déterminera cette fonction en égalant entre eux les termes qui ne sont pas sous la parenthèse, ce qui décomposera l'équation précédente en ces deux-ci :

$$X(dz + Pzdx) = 0, \quad zdX = Qdx;$$

la première donne

$$\frac{dz}{z} = -Pdx, \quad \text{ou} \quad \log z = -\int Pdx,$$

ou, en observant que $\log e$ équivaut à l'unité,

$$\log z = -\int Pdx \log e = \log e^{-\int Pdx};$$

passant aux nombres, on a

$$z = e^{-\int Pdx};$$

on tire de la seconde

$$dX = \frac{Qdx}{z} = Qe^{\int Pdx} dx;$$

donc

$$X = \int Qe^{\int Pdx} dx + C;$$

mettant ces valeurs de z et de X dans l'équation

$$y = zX,$$

on obtient

$$y = e^{-\int Pdx} \left(\int Qe^{\int Pdx} dx + C \right) \dots (90).$$

Cette équation porte le nom d'*équation linéaire du premier ordre*; nous en verrons la raison, art. 441.

386. La séparation des variables peut toujours s'effectuer dans les équations différentielles du premier ordre à deux variables, lorsqu'elles sont homogènes. Une équation homogène est celle dans laquelle tous les termes, considérés par rapport aux variables, sont de mêmes dimensions : ainsi l'équation

$$ax^2y^3 + bxy^4 + cy^3x^2 = 0$$

est une équation homogène, puisque la somme des exposants de x et de y étant égale à 5 dans chaque terme, tous les produits x^2y^3 , xy^4 , etc., sont chacun de cinq dimensions.

L'équation

$$ax^5y^3 - bx^3y^5 + cy^8 = 0$$

est aussi homogène, puisque la somme des exposants des variables dans chaque terme est 8. La variable x n'entre pas dans le dernier terme de l'équation, mais cette variable peut être considérée comme élevée à la puissance zéro.

387. Soit, en général, z une fonction de x et de y , composée de termes homogènes, tels que Ax^py^q , $Bx^{p'}y^{q'}$, $Cx^{p''}y^{q''}$, etc. Si nous représentons par n la somme des exposants de x et de y , dans un de ces termes, nous aurons, en vertu de l'homogénéité,

$$p + q = n, \quad p' + q' = n, \quad p'' + q'' = n, \text{ etc.}$$

Cela posé, si nous divisons tous les termes par x^n , l'égalité subsistera encore, et le terme Ax^py^q deviendra

$$\frac{Ax^py^q}{x^n} = \frac{Ay^q}{x^{n-p}} = \frac{Ay^q}{x^q} = A\left(\frac{y}{x}\right)^q;$$

ce que nous disons de ce terme pouvant s'appliquer à tous les autres, nous aurons donc

$$\frac{z}{x^n} = F\left(\frac{y}{x}\right);$$

et en faisant $\frac{y}{x} = q$, cette équation deviendra

$$x^n Fq = z,$$

équation qu'on peut écrire ainsi :

$$Qx^n = z,$$

en appelant Q la fonction représentée par Fq .

388. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$Mdx + Ndy = 0,$$

dans laquelle les coefficients M et N sont des fonctions homogènes de deux variables x et y d'une dimension n .

En divisant cette équation par x^n , elle pourra donc se mettre sous la forme

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + F\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0;$$

et si nous faisons $\frac{y}{x} = z$, cette équation deviendra

$$dx\varphi z + dyFz = 0,$$

ou plutôt

$$\varphi z + Fz \frac{dy}{dx} = 0 \dots (91).$$

Pour achever d'éliminer y au moyen de l'équation $\frac{y}{x} = z$, ou plutôt $y = zx$, nous différencierons cette dernière équation et nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = z + \frac{xdz}{dx};$$

cette valeur réduit l'équation (91) à

$$\varphi z + Fz \left(z + \frac{xdz}{dx} \right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{xdz}{dx} = -\frac{\varphi z}{Fz} - z = -\frac{(\varphi z + zFz)}{Fz},$$

et, en séparant les variables,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dzFz}{\varphi z + zFz},$$

et par conséquent

$$\log x = - \int \frac{dz Fz}{\phi z + z Fz} + C.$$

Lorsqu'on aura intégré, il ne s'agira plus que de mettre dans le résultat la valeur de z .

389. Prenons pour exemple l'équation $x^2 dy = y^2 dx + xy dx$: en faisant $y = zx$, nous trouverons

$$dy = z dx + x dz,$$

et, en substituant ces valeurs, l'équation deviendra

$$x^2 z dx + x^3 dz = z^2 x^2 dx + x z^2 dx;$$

réduisant et divisant par x^2 , facteur commun, on obtiendra

$$x dz = z^2 dx;$$

cette équation étant divisée par z^2 et par x , donne

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2},$$

et en intégrant, on aura

$$\log x = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + C = -\frac{x}{y} + C.$$

390. Prenons pour second exemple l'équation

$$\frac{x^2 + yx}{x - y} dy = y dx;$$

en faisant disparaître le dénominateur, on voit que tous les termes de cette équation sont de deux dimensions; ainsi, nous supposerons $y = zx$; et en réduisant, cette équation nous donnera

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{(1 - z)}{(1 + z)};$$

mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur tirée de l'équation $y = zx$, on aura

$$z + \frac{xdz}{dx} = \frac{z(1-z)}{1+z},$$

transposant z dans le second membre, et réduisant au même dénominateur, on trouvera

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(1+z)}{2z^2} dz,$$

et enfin

$$\begin{aligned} \log x &= -\int \frac{dz}{2z^2} - \int \frac{dz}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2} \log z + C \\ &= \frac{x}{2y} + \frac{1}{2} \log \frac{y}{x} + C. \end{aligned}$$

391. Lorsque l'équation proposée, outre les termes $Ax^r y^s, \dots$, $Bx^r y^{s'} + \text{etc.}$, contient des polynômes tels que

$$(Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{etc.})^k dx, \quad (Px^t y^u + Qx^{t'} y^{u'} + \text{etc.})^l dy,$$

les variables seront encore séparables si l'on a

$$p + q = p' + q' = (r + s)k = (r' + s')k = (t + u)l = (t' + u')l, \dots (92).$$

Pour le démontrer, faisons

$$(r + s)k = n, \quad (r' + s')k = n \dots (93),$$

et divisons par x^n tous les termes du polynôme

$$(Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{etc.})^k,$$

ce polynôme deviendra

$$\left(\frac{Mx^r y^s + Nx^{r'} y^{s'} + \text{etc.}}{x^{\frac{n}{k}}} \right)^k = \left(\frac{My^s}{x^{\frac{n}{k} - r}} + \frac{Ny^{s'}}{x^{\frac{n}{k} - r'}} + \text{etc.} \right)^k;$$

or, les équations (93) nous donnent

$$\frac{n}{k} - r = s, \quad \frac{n}{k} - r' = s';$$

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, nous trouverons

$$\left(M \frac{y^s}{x^i} + N \frac{y^{s'}}{x^{i'}} + \text{etc.} \right)^k = \left[M' \left(\frac{y}{x} \right)' + N' \left(\frac{y}{x} \right)'' + \text{etc.} \right]^k,$$

ce qui prouve que lorsque les équations (92) ont lieu, les polynômes élevés à des puissances, se réduisent, comme les autres termes, à des fonctions de $\frac{y}{x}$.

Par conséquent, en faisant $\frac{y}{x} = z$, ou plutôt $y = zx$, l'équation peut se réduire à une fonction de z . Pour en donner un exemple, soit

$$x dy - y dx = dz \sqrt{x^2 - y^2} \dots (94).$$

Cette équation écrite ainsi,

$$x^2 y^0 dy - y^1 x^0 dx = dz (x^2 y^0 - y^2 x^0)^{\frac{1}{2}},$$

on voit que les équations (92) sont satisfaites; ainsi, nous ferons $y = zx$, et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (94), réduisant et divisant par le facteur commun, on obtiendra

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

intégrant, on trouvera, art. 273,

$$\log x = \arcsin(z) + C,$$

ou, en remettant la valeur de z ,

$$\log x = \arcsin\left(\sin \frac{y}{x}\right) + C.$$

392. En général, lorsqu'on a une fonction homogène des variables x, y, z , etc., on peut toujours séparer l'une des variables, par exemple x , en faisant $y = tx, z = ux$, etc. (*).

(*) Voici ce calcul : soit $M dx + N dy + P dz = 0$, une équation homogène, dans laquelle M, N, P , soient des fonctions des trois variables

393. On emploie quelquefois des exposans indéterminés pour rendre une équation homogène : soit, par exemple, l'équation

$$ay^m x^n dx + bx^p dx + cx^q dy = 0;$$

on supposera $y = z^k$; et comme l'exposant k n'est pas une variable, mais une constante inconnue, on différenciera par l'art. 21, et l'on aura

$$dy = kz^{k-1} dz \quad \text{et} \quad y^m = z^{km};$$

en substituant, on obtiendra

$$az^{km} x^n dx + b x^p dx + c k x^q z^{k-1} dz = 0;$$

cette équation sera homogène si l'on a

$$km + n = p, \quad q + k - 1 = p;$$

x, y, z ; ces fonctions M, N, P contiendront des termes tels que $Ax^p y^q z^r$, $Bx^p y^q z^r$, $Cx^p y^q z^r$, et l'on aura $p+q+r=p'+q'+r'=p''+q''+r''=n$. Si dans l'un de ces termes, par exemple, dans $Ax^p y^q z^r$, on substitue les valeurs $y = tx$, $z = ux$, ce terme deviendra

$$Ax^p t^q u^r x^r = x^{p+q+r} \times Attu^r = x^n Attu^r;$$

la même chose ayant lieu pour les autres termes, si l'on y substitue les valeurs de y et de z , l'équation $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ aura x^n pour facteur commun; supprimant ce facteur elle prendra la forme

$$\phi(t, u)dx + F(t, u)d.t + f(t, u)d.u = 0;$$

et, en exécutant les différenciations indiquées, on aura

$$\phi(t, u)dx + F(t, u)(tdx + xdt) + f(t, u)(udx + xdu) = 0;$$

d'où l'on tirera

$$[\phi(t, u) + tF(t, u) + u f(t, u)] dx = -x [F(t, u)dt + f(t, u)du];$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{x} = - \frac{F(t, u)dt + f(t, u)du}{\phi(t, u) + tF(t, u) + u f(t, u)}.$$

éliminant l'indéterminée k , on trouvera

$$\frac{p-n}{m} = p+1-q,$$

équation de condition qui doit avoir lieu pour que la proposée puisse être homogène par la substitution de.....
 $y = z^k = x^{p+1-q}$.

394. Il existe, sur les fonctions homogènes, un théorème important que nous allons démontrer de la manière suivante :

Soit $Mdx + Ndy$ la différentielle d'une fonction homogène z entre deux variables x et y ; si nous représentons par n la somme des exposans des variables, dans l'un des termes qui composent cette fonction, nous aurons donc l'équation

$$Mdx + Ndy = dz \dots (95).$$

Faisant $\frac{y}{x} = q$, on trouvera, art. 387,

$$Qx^n = z;$$

remplaçant, dans l'équation (95), y par sa valeur qx , et appelant M' et N' ce que deviennent alors M et N , l'équation (95) se transforme en

$$M'dx + N'd.qx = dz;$$

et, en substituant la valeur de z , on aura

$$M'dx + N'd.qx = d(Qx^n) \dots (96);$$

la différentielle de qx étant $qdx + xdq$, si nous mettons cette valeur à la place de $d.qx$, nous obtiendrons,

$$(M' + N'q)dx + N'xdq = d(Qx^n);$$

or, $(M' + N'q)dx$ étant la différentielle de Qx^n , prise par rapport à x , on a

$$M' + N'q = nQx^{n-1};$$

si dans cette équation on remet y au lieu de qx , elle deviendra

$$M + N\frac{y}{x} = nQx^{n-1},$$

ou

$$Mx + Ny = nz.$$

395. Ce théorème peut s'appliquer à des fonctions homogènes d'un nombre quelconque de variables; car, si l'on avait, par exemple, l'équation

$$Mdx + Mdy + Pdt = dz,$$

dans laquelle la dimension fût toujours n , il suffirait de faire $\frac{y}{x} = q$, $\frac{t}{x} = r$, pour prouver, par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé, qu'on doit avoir $z = x^n F(q, r)$, et par suite

$$My + Nx + Pt = nz.$$

Des conditions d'intégrabilité des fonctions de deux variables. — Intégration des fonctions qui remplissent ces conditions. — Recherche des facteurs propres à rendre intégrables les équations qui ne le sont pas immédiatement.

396. Lorsqu'on a une différentielle $Mdx + Ndy = 0$, on ne peut pas affirmer qu'il existe toujours une équation qui, étant différenciée, donne la proposée; car, si l'on différenciait, par exemple, l'équation $f(x, y) = 0$, et qu'on en tirât $mdx + ndy = 0$, on pourrait multiplier cette équation par une fonction de x , et obtenir une équation $Mdx + Ndy = 0$ dont les coefficients M et N seraient

différens de m et de n ; par conséquent, l'équation...
 $Mdx + Ndy = 0$, ne résulterait plus du seul procédé de
 la différenciation de

$$f(x,y) = 0.$$

Il en serait de même si l'on combinait arbitrairement
 $m dx + n dy = 0$, avec l'équation primitive $f(x,y) = 0$:
 par exemple, en éliminant un ou plusieurs termes entre
 $m dx + n dy = 0$ et $f(x,y) = 0$, on pourrait obtenir une
 équation

$$M'dx + N'dy = 0,$$

dans laquelle les coefficients différentiels M' et N' seraient
 différens de m et de n .

397. Une équation qui, telle que $m dx + n dy = 0$, a
 été obtenue par le seul procédé de la différenciation, se
 nomme une différentielle exacte ; il en est de même de
 toute fonction différentielle qui ne serait pas égale à zéro,
 mais qu'on aurait trouvée par le seul moyen de la dif-
 férenciation. Lorsqu'une équation différentielle.....
 $Mdx + Ndy = 0$, n'est pas une différentielle exacte, on ne
 peut songer à l'intégrer que lorsqu'on l'a rendue une diffé-
 rentielle exacte par quelque opération préparatoire.

398. Euler résolut le premier ce problème important :

1°. Une équation différentielle étant donnée, déterminer
 comment on peut reconnaître lorsqu'elle est une différentielle
 exacte ?

2°. Quel est le moyen d'intégrer cette équation ?

Avant de donner une solution de ce problème, je rap-
 pellerai que, d'après notre convention, article 52, l'expres-
 sion $\frac{dz}{dx}$ nous indique que la fonction z de x de y , a été
 différenciée par rapport à x , et divisée par dx (*) ; si en-

(*) Soit $dz = A dx + B dy + C dt$, etc., la différentielle totale de z ;

suite cette fonction $\frac{dz}{dx}$ est différenciée par rapport à une autre variable y et divisée par dy , nous écrirons ainsi le résultat de cette opération : $\frac{d^2z}{dx dy}$. Si, au contraire, on eût pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à y , et ensuite par rapport à x , on aurait écrit ainsi le résultat de cette opération : $\frac{d^2z}{dy dx}$.

Lorsque z est une fonction de trois variables x, y, u ; une expression telle que $\frac{d^3z}{dx dy du}$ indique qu'on a pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à x , et ensuite le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y , et enfin, le coefficient différentiel de $\frac{d^2z}{dx dy}$ par rapport à u . Pareillement l'expression $\frac{d^3z}{dx^2 dy}$, indique qu'on a effectué cinq différenciations successives sur z , les deux premières par rapport à x , et les trois autres par rapport à y .

399. Cela posé, le théorème d'Euler repose sur la proposition suivante, qui a été démontrée, art. 172.

Si l'on a une fonction z de deux variables x et y , et qu'on prenne le coefficient différentiel de z , d'abord par rapport à x , et qu'on prenne ensuite le coefficient diffé-

le rapport $\frac{dz}{dx}$ n'est autre chose que le coefficient différentiel A . Si l'on demandait le rapport de $A dx + B dy + C dz$, etc., à dx , il ne faudrait donc pas le représenter par $\frac{dz}{dx}$; dans ce cas, le rapport de la différentielle totale à dx s'écrira de l'une des manières suivantes :

$$\frac{1}{dx} dz \quad \text{ou} \quad \frac{d(s)}{dx}$$

rentiel de $\frac{dz}{dx}$, par rapport à y , on aura le même résultat que si l'on eût d'abord pris le coefficient différentiel de z par rapport à y , et ensuite le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dy}$ par rapport à x : c'est ce qu'on exprime en disant que

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d^2z}{dy dx}.$$

400. Si l'on a, par exemple, $z = x^2 + xy$, on trouve

$$\frac{dz}{dx} = 2x + y, \quad \frac{dz}{dy} = x,$$

et par conséquent

$$\frac{d^2z}{dx dy} = 1 = \frac{d^2z}{dy dx}.$$

401. Cela posé, soit z la fonction dont la différentielle est $Mdx + Ndy$; on a

$$M = \frac{dz}{dx}, \quad N = \frac{dz}{dy}.$$

La première de ces équations, différenciée par rapport à y , donnera

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2z}{dx dy};$$

la seconde, différenciée par rapport à x , donnera

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d^2z}{dy dx};$$

Les seconds termes de ces équations étant identiques, il en résulte que

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \dots (97);$$

toutes les fois que cette équation de condition aura lieu, la différentielle proposée sera exacte.

402. Je reconnais, par exemple, que l'expression...
 $(2x - y) dx - xdy$ est une différentielle exacte, parce que

$$\frac{dM}{dy} = -1 = \frac{dN}{dx}.$$

L'expression

$$(y^2 + 3x^2)dx + (3y^2 + 2xy)dy.$$

est aussi une différentielle exacte, car

$$\frac{dM}{dy} = 2y = \frac{dN}{dx}.$$

403. L'équation $ydx - xdy = 0$ n'est pas une différentielle exacte, puisque $\frac{dM}{dy} = 1$ et que $\frac{dN}{dx} = -1$. En effet, cette équation dérive de celle-ci :

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,$$

trouvée immédiatement par la différenciation, et dans laquelle on a supprimé le diviseur commun y^2 ; en le restituant, on aura $M = \frac{1}{y}$, $N = -\frac{x}{y^2}$, et la condition...
 $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ sera remplie.

404. Proposons-nous maintenant d'intégrer une différentielle à deux variables, lorsqu'il a été reconnu qu'elle est exacte. Pour cet effet, nous remarquerons d'abord que lorsqu'une fonction z de x et de y , par la différenciation, a donné $Mdx + Ndy$, le terme Mdx a été obtenu, en regardant y comme constant. Par conséquent, lorsque nous

intégrerons la partie Mdx , la constante que nous ajouterons, pourra renfermer y , et en la représentant par Y , sauf, si le cas l'exige, à regarder Y comme une constante ordinaire, nous écrirons :

$$u = \int Mdx + Y = 0 \dots (98).$$

Cette équation étant celle qui, par la différenciation, a dû nous donner $Mdx + Ndy = 0$, il suit de là que N n'est autre chose que le coefficient différentiel de $\int Mdx + Y$, par rapport à y .

En effectuant cette différenciation, nous aurons

$$N = \frac{d \int Mdx}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

on tire de cette équation

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d \int Mdx}{dy},$$

et en intégrant,

$$Y = \int \left(N - \frac{d \int Mdx}{dy} \right) dy;$$

cette valeur de Y étant mise dans l'équation (98), nous obtiendrons

$$u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{d \int Mdx}{dy} \right) dy \dots (99).$$

Il est à observer que $N - \frac{d \int Mdx}{dy}$ ne renferme pas x , puisque cette expression, multipliée par dy , doit donner pour intégrable une fonction Y de la seule variable y .

405. Pour démontrer que l'expression $N - \frac{d \int Mdx}{dy}$ n'est pas une fonction de x , nous en prendrons le coefficient différentiel par rapport à x , et nous aurons

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d(d \int M dx)}{dy dx} \dots (100);$$

et en changeant l'ordre des différenciations, la seconde partie de cette expression deviendra

$$\frac{d(d \int M dx)}{dx dy} = \frac{d\left(\frac{d \int M dx}{dx}\right)}{dy};$$

or, l'intégrale $\int M dx$ ayant été prise par rapport à x , la différentielle de $\int M dx$, relativement à la même variable x , sera $M dx$; donc $\frac{d \int M dx}{dx} = M$,

ce qui réduit l'expression $\frac{d\left(\frac{d \int M dx}{dx}\right)}{dy}$ à $\frac{dM}{dy}$; substituant cette valeur dans l'expression (100), nous aurons $\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$; or, cette quantité est nulle d'après l'équation de condition d'intégrabilité, d'où il suit que la différentielle de $N = \frac{d \int M dx}{dy}$ par rapport à x , est nulle, ce qui prouve que cette expression ne renferme pas x .

406. Au moyen de la formule (98), on peut intégrer toute fonction de deux variables qui satisfait à la condition d'intégrabilité. Prenons pour exemple,

$$(6xy - y^3) dx + (3x^2 - 2xy) dy \dots (101).$$

En comparant cette expression à la formule $M dx + N dy$, nous avons

$$6xy - y^3 = M, \quad 3x^2 - 2xy = N \dots (102).$$

Par conséquent, la condition d'intégrabilité est remplie, puisque l'on trouve

$$\frac{dM}{dy} = 6x - 2y = \frac{dN}{dx};$$

intégrant l'expression $(6xy - y^3) dx$, dans l'hypothèse de y constant, nous aurons

$$\int M dx = \int (6xy - y^3) dx = 3x^2 y - y^3 x;$$

substituant cette valeur et celle de N dans l'équation (99), nous obtiendrons

$$u = 3x^2y - y^2x + \int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy} \right] dy.$$

La partie affectée du signe d'intégration, en exécutant la différenciation indiquée, se réduit à

$$f(3x^2 - 2xy - 3x^2 + 2yx) dy;$$

et, en ôtant le signe d'intégration, on a une différentielle dont les termes se détruisent : il résulte de là que l'expression représentée par

$$\int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d(3x^2y - y^2x)}{dy} \right] dy,$$

est constante, vu que toute quantité dont la différentielle est nulle, est constante; d'où il suit que l'intégrale cherchée est $3x^2y - y^2x + \text{constante}$.

407. Si l'on n'eût pas voulu employer la formule trouvée par l'article précédent, on aurait pu faire directement le calcul de la manière suivante :

On intégrera l'expression (101), en regardant y comme constant, et l'on aura

$$\int M dx = f(6xy - y^2) dx + Y,$$

ou

$$u = 3x^2y - y^2x + Y \dots (103);$$

différenciant cette équation par rapport à y , on obtiendra

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy + \frac{dY}{dy} \dots (104):$$

$\frac{du}{dy}$ n'étant autre chose que le coefficient de dy dans l'expression (101), nous avons aussi

$$\frac{du}{dy} = 3x^2 - 2xy;$$

comparant ces valeurs, nous trouverons $\frac{dY}{dy} = 0$, et par conséquent $Y = \text{constante}$; mettant cette valeur dans l'équation (103), nous trouverons

$$u = 3x^2y - y^2x + \text{constante}.$$

408. Soit encore la fonction

$$(2y^2x + 3y^3)dx + (2x^2y + 9xy^2 + 8y^3)dy;$$

si on la compare à l'expression $Mdx + Ndy$, on trouvera

$$M = 2y^2x + 3y^3, \quad N = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

et comme l'on a

$$\frac{dM}{dy} = 4yx + 9y^2 = \frac{dN}{dx},$$

la fonction proposée est une différentielle exacte. Intégrant par rapport à x , nous aurons

$$\int Mdx = y^2x^2 + 3y^3x + Y,$$

ou

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + Y;$$

différenciant cette expression par rapport à y , on obtiendra

$$\frac{du}{dy} = \frac{d(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy};$$

d'une autre part $\frac{du}{dy}$ représentant le coefficient de dy dans l'équation proposée, nous aurons encore

$$\frac{du}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3;$$

de ces deux valeurs de $\frac{du}{dy}$ on tire cette équation

$$\frac{d(y^2x^2 + 3y^3x)}{dy} + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

et en effectuant la différenciation indiquée par rapport à y , on a

$$2x^2y + 9y^2x + \frac{dY}{dy} = 2x^2y + 9xy^2 + 8y^3,$$

équation qui se réduit à

$$\frac{dY}{dy} = 8y^3;$$

donc

$$Y = \int 8y^3 dy = 2y^4 + C,$$

et par conséquent l'intégrale cherchée est

$$u = y^2x^2 + 3y^3x + 2y^4 + C.$$

409. On a vu, art. 403, que l'équation $ydx - xdy = 0$, n'était pas une différentielle exacte; parce que cette équation avait perdu le facteur commun $\frac{1}{y^2}$; on sent donc qu'il peut exister des équations qui, telles que celles-ci, ne sont pas immédiatement intégrables, mais qui le deviendraient si on pouvait restituer ce facteur.

410. Soit en général l'équation $Pdx + Qdy = 0$, qui est une différentielle exacte, et z le facteur commun, que, pour plus de généralité, nous supposons une fonction de x et de y ; nous aurons

$$P = Mz, \quad Q = Nz.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation précédente, le facteur commun z disparaîtra, et l'on aura

$$Mdx + Ndy = 0, \quad (105).$$

L'équation $Pdx + Qdy = 0$ étant une différentielle exacte par hypothèse, on aura

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx};$$

mettant pour P et pour Q leurs valeurs, cette équation deviendra

$$\frac{dMz}{dy} = \frac{dNz}{dx};$$

et en développant, on trouvera

$$\frac{Mdz}{dy} + \frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + \frac{zdN}{dx} \dots (106).$$

411. Lorsque le facteur commun z est constant, $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$ étant nuls, l'équation (106) devient

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

et par conséquent la condition nécessaire pour que l'équation (105) soit une différentielle exacte, est remplie. Mais lorsque z est une fonction de x et de y , la détermination de z dépend de l'équation (106); or, cette équation est plus difficile à intégrer que la proposée, qui ne renferme que le seul coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, tandis que l'équation (106)

renferme les deux coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, et contient trois variables x, y, z .

412. Si l'équation est homogène, il est très facile de déterminer ce facteur; car soit $Mdx + Ndy = 0$, une équation homogène, qui devienne intégrable par la multiplication d'une fonction homogène z , de x et de y ; appelant u

L'intégrale de l'équation $zMdx + zNdy = 0$, on a

$$zMdx + zNdy = du \dots (107);$$

cette équation étant homogène, on en déduit, art. 394.

$$zMx + zNy = nu \dots (108);$$

or, si la dimension de M est représentée par m , et celle de z par k , la dimension de l'un des termes zMx , zNy sera donc $m + k + 1$; cette valeur étant mise à la place de n , dans l'équation précédente, nous aurons

$$zMx + zNy = (m + k + 1)u;$$

divisant l'équation (107) par celle-ci, nous trouverons

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{du}{u} \times \frac{1}{m + k + 1}.$$

Le second membre de cette équation étant une différentielle exacte, il en doit être de même du premier; d'où il suit que

$\frac{1}{Mx + Ny}$ doit être un facteur propre à rendre intégrable l'équation homogène $Mdx + Ndy = 0$.

413. Si le facteur commun z , qui doit rendre homogène la proposée, n'est fonction que de x , on a $\frac{dz}{dy} = 0$, ce qui réduit l'équation (106) à

$$z \frac{dM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + z \frac{dN}{dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{Ndz}{dx} = z \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right)$$

et par conséquent

$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} \right) dx \dots (109);$$

intégrant, on a

$$\log z = \int \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} \right) dx = \int \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx;$$

multipliant par $\log e$, changeant le coefficient de $\log e$ en exposant, et passant aux nombres, on trouve

$$z = e^{\int \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) dx} \dots (110).$$

Il ne s'agira donc plus que de multiplier l'équation proposée par ce facteur z , pour qu'elle devienne une différentielle exacte.

414. Soit, par exemple, $ydx - xdy = 0$; on obtient

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 2,$$

ce qui réduit la formule (109) à

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{-x};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\log z = -2 \log x + \log C = -\log x^2 + \log C = \log \frac{C}{x^2};$$

et en passant aux nombres, on trouve $z = \frac{C}{x^2}$: par conséquent l'expression $\frac{C(ydx - xdy)}{x^2}$ sera une différentielle exacte.

415. On peut trouver une infinité de facteurs qui jouissent de la même propriété. En effet, soit z un facteur qui rende exacte l'équation $Mzdx + Nzdy = 0$; en représentant par u l'intégrale de cette équation, nous aurons

$$Mzdx + Nzdy = du;$$

multipliant les deux membres par ϕu , nous obtiendrons

$$\phi u (Mzdx + Nzdy) = \phi u du.$$

La forme de ϕu étant arbitraire, nous pouvons faire, par exemple, $\phi u = 2u^2$, et alors $2u^2 du$ étant une différentielle exacte

$$2u^2 (Mzdx + Nzdy) = 2u^2 du$$

en sera aussi une; donc le facteur $2u^2$ aura la propriété de rendre intégrable l'expression

$$Mdx + Ndy = 0.$$

On voit qu'on peut faire une infinité d'autres hypothèses sur ϕu .

Des conditions d'intégrabilité des fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables. Intégration des équations de trois variables qui y satisfont. De l'équation de condition qui a lieu pour que l'intégration des équations différentielles à trois variables dépende d'un facteur commun, et des moyens de satisfaire à la proposée, lorsque cette équation de condition n'existe pas.

416. Proposons-nous de déterminer les conditions d'intégrabilité de la différentielle d'une fonction de trois variables x, y, z ; cette fonction étant représentée par u , nous aurons

$$du = Mdx + Ndy + Pdz \dots (111);$$

par conséquent

$$M = \frac{du}{dx}, \quad N = \frac{du}{dy}, \quad P = \frac{du}{dz}.$$

On peut combiner deux à deux ces équations, de trois manières différentes :

$$1^\circ. \frac{du}{dx} = M \quad \text{et} \quad \frac{du}{dy} = N,$$

$$2^\circ. \frac{du}{dx} = M \quad \text{et} \quad \frac{du}{dz} = P,$$

$$3^\circ. \frac{du}{dy} = N \quad \text{et} \quad \frac{du}{dz} = P.$$

417. Par une démonstration analogue à celle que nous avons donnée précédemment, on déduira de ces équations celles-ci :

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \dots (112).$$

En général, s'il y a n variables, on aura autant d'équations de condition que ces variables peuvent donner de produits distincts deux à deux, et par conséquent $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition.

418. Lorsque la différentielle du est nulle, l'équation (111) se réduit à

$$Mdx + Ndy + Pdz = 0;$$

mettons-la sous la forme

$$dz = m dx + n dy \dots (113);$$

en faisant

$$\frac{M}{P} = -m, \quad \frac{N}{P} = -n \dots (114).$$

Or, si nous regardons z comme une fonction de x et de y , nous pourrions traiter l'équation (113) comme elle ne renfermait que ces deux variables; par conséquent, la condition d'intégrabilité se réduira à celle de l'art. 401, c'est-à-dire qu'il faudra que la différentielle de m , prise par rapport à y , et divisée par cette variable, soit égale à la différentielle de n par rapport à x , et divisée par x . Pour obtenir ces expressions, nous remarquerons que la première ne sera pas seulement $\frac{dm}{dy}$, mais devra avoir un second terme provenant de la différenciation de la variable z , regardée comme fonction de y ; ce terme sera donc représenté, art. 24, par $\frac{dm}{dz} \frac{dz}{dy}$. Ce que nous disons de la différentielle totale, prise par rapport à y , devant s'appliquer à la différentielle totale, prise par rapport à x , l'équation de condition (97), art. 401, sera, dans le cas présent,

$$\frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dz} \frac{dz}{dy} = \frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dz} \frac{dz}{dx};$$

transposant et observant que, d'après l'équation (113), $\frac{dz}{dx} = m$, et que $\frac{dz}{dy} = n$, on a

$$\frac{dm}{dy} - \frac{m}{dx} + n \frac{dm}{dz} - m \frac{dn}{dz} = 0 \dots (115).$$

Or, en différenciant les équations (114), d'après l'art. 19, on a

$$\frac{dm}{dy} = -\frac{P \frac{dM}{dy} - M \frac{dP}{dy}}{P^2}, \quad \frac{dn}{dx} = -\frac{P \frac{dN}{dx} - N \frac{dP}{dx}}{P^2},$$

$$n \frac{dm}{dz} = \frac{N}{P} \cdot \frac{P \frac{dM}{dz} - M \frac{dP}{dz}}{P^2}, \quad m \frac{dn}{dz} = \frac{M}{P} \cdot \frac{P \frac{dN}{dz} - N \frac{dP}{dz}}{P^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (115), réduisant les deux derniers termes et supprimant le dénominateur commun P^2 , nous trouverons, en changeant tous les signes,

$$P \frac{dM}{dy} - M \frac{dP}{dy} - P \frac{dN}{dx} + N \frac{dP}{dx} - N \frac{dM}{dz} + M \frac{dN}{dz} = 0 \dots (116).$$

Telle est l'équation de condition qui doit avoir lieu pour que z puisse être considéré comme une fonction de deux variables indépendantes x et y , c'est-à-dire pour qu'il puisse exister une équation finie entre ces trois variables; par conséquent, si l'on prend au hasard, une équation $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, entre trois variables, avant que de savoir si l'équation (116) est remplie, on ne pourra pas affirmer que l'une des variables est fonction des deux autres; c'est-à-dire que l'équation différentielle proposée nécessite l'existence d'une certaine équation entre x , y et z , ou, en d'autres termes, que cette équation différentielle ait une équation unique pour intégrale.

419. Une équation différentielle à trois variables, pour laquelle l'équation (116) ne se réalise pas, était autrefois regardée comme absurde, ou du moins comme insignifiante; M. Monge, ainsi que nous allons bientôt le faire voir, prouva que l'on était dans l'erreur.

420. Lorsque les équations (112) ne sont pas satisfaites, si nous représentons par λ le facteur propre à rendre $Mdx + Ndy + Pdz$ une différentielle exacte, les équations de condition (112) deviendront

$$\frac{d\lambda M}{dy} = \frac{d\lambda N}{dx}, \quad \frac{d\lambda M}{dz} = \frac{d\lambda P}{dx}, \quad \frac{d\lambda N}{dz} = \frac{d\lambda P}{dy};$$

effectuant les différenciations indiquées; on obtient

$$M \frac{d\lambda}{dy} - N \frac{d\lambda}{dx} + \lambda \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = 0,$$

$$M \frac{d\lambda}{dz} - P \frac{d\lambda}{dx} + \lambda \left(\frac{dM}{dz} - \frac{dP}{dx} \right) = 0,$$

$$N \frac{d\lambda}{dz} - P \frac{d\lambda}{dy} + \lambda \left(\frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} \right) = 0.$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par P , la seconde par $-N$, et la troisième par M , et qu'on les ajoute, les termes qui ne sont pas entre les parenthèses se détruiront; l'équation étant divisible par λ , ce facteur disparaîtra, et il restera

$$P \frac{dM}{dy} - P \frac{dN}{dx} - N \frac{dM}{dz} + N \frac{dP}{dx} + M \frac{dN}{dz} - M \frac{dP}{dy} = 0;$$

ce qui est l'équation de condition (116), que nous avons vu être nécessaire pour que l'une des variables soit fonction des deux autres : résultat qui s'accorde avec cette hypothèse; car si la proposée pouvait devenir intégrable par la restitution d'un facteur, elle conduirait à une équation unique entre x , y et z , équation qui serait contradictoire avec ce qui précède, puisque l'une des variables serait fonction des deux autres.

421. Examinons de quelle manière on peut déterminer l'intégrale lorsque l'équation (116) est satisfaite. Pour cet effet, regardons d'abord z comme constant dans l'équation $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, et nommons λ le facteur propre à rendre cette équation une différentielle exacte; nous en représenterons l'intégrale par V , et alors V sera, en général, une fonction de trois variables x , y , z ; cette intégrale devra être complétée par une constante arbitraire fonction de z , que nous désignerons par ϕz , de sorte que nous aurons

$$V + \phi z = 0.$$

Le coefficient différentiel de cette équation, pris par rapport à z , devant être identique au terme qui multiplie dz dans la proposée, il faudra que l'on ait

$$\frac{dV}{dz} + \frac{d\phi z}{dz} = P,$$

d'où l'on tirera

$$d\phi z = \left(P - \frac{dV}{dz} \right) dz.$$

Comme le premier membre de cette équation ne contient que z , le second doit se réduire à une fonction de z , qui étant intégrée, donnera la valeur de ϕz .

422. Soit, par exemple, l'équation

$$yzdx + xzdy + xydz = 0;$$

intégrant $yzdx + xzdy$, en regardant z comme constant, on trouvera

$$zxy + \phi z = 0;$$

cette équation, différenciée par rapport à z , divisée par dz et égale au coefficient de dz de la proposée, nous donnera

$$xy + \frac{dez}{dz} = xy;$$

donc

$$\frac{dez}{dz} = 0,$$

et par conséquent $ez = \text{constante}$; d'où nous déduirons $xyz + C$ pour l'intégrale de la proposée, comme on devait s'y attendre.

423. Soit maintenant l'équation $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, une équation différentielle, pour laquelle l'équation de condition (116) ne se réalise pas; désignons par λ le facteur propre seulement à rendre intégrable la partie $Mdx + Ndy$, prise en regardant z comme constant, et multiplions la proposée par ce facteur; nous aurons

$$\lambda Mdx + \lambda Ndy + \lambda Pdz = 0 \dots (117);$$

intégrant la partie $\lambda Mdx + \lambda Ndy$ dans l'hypothèse de z constant, l'intégrale que nous obtiendrons pourra être représentée, comme dans l'article 421, par

$$V + ez.$$

La différentielle de cette équation étant prise par rapport aux trois variables, nous ne pourrions en conclure son identité avec l'équation (117), puisque celle-ci ne peut provenir de la différenciation d'une autre; d'où il suit que l'équation

$$\frac{dV}{dz} + \frac{dez}{dz} = \lambda P \dots (118)$$

ne peut subsister que par une condition indépendante de l'hypothèse dans laquelle l'équation (117) proviendrait d'une seule équation différenciée. Comme nous n'avons pour but que de satisfaire à l'équation (117), nous sortirons de cette hypothèse et nous établirons arbitrairement entre les variables x , y et z , la relation (118); alors les équations

$$V + ez = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dz} + \frac{dez}{dz} = \lambda P \dots (119)$$

satisferont conjointement à l'équation (117), en différenciant la première des équations (119), et en l'ajoutant à la seconde; en effet, la différentielle de $V + ez$ étant prise par rapport à x et à y , donnera les termes $\lambda Mdx + \lambda Ndy$, et la seconde des équations (119), multipliée par dz , donnera la valeur du terme λPdz ,

424. Prenons pour exemple l'équation

$$ydy + zdx = dz;$$

si l'on regarde z comme constant, le facteur propre à rendre intégrable la partie $ydy + zdx$, est z , par conséquent nous aurons

$$zydy + z^2dx - zdz = 0 \dots (120);$$

cette équation sera satisfaite par le système des deux suivantes :

$$y^2 + 2zx + \varphi z = 0, \quad 2x + \frac{d\varphi z}{dz} + 2 = 0 \dots (121).$$

En effet, la première étant différenciée par rapport à toutes les variables, donnera

$$2ydy + 2zdx + 2xdz + \frac{d\varphi z}{dz} dz = 0;$$

tirant de cette équation la valeur de $2ydy + 2zdx$, et la substituant dans l'équation (120), on réduira celle-ci à

$$-2xdz - \frac{d\varphi z}{dz} dz - zdz = 0,$$

équation satisfaite d'elle-même, en vertu de la seconde des équations (121).

425. Les équations (121) nous montrent que la forme de la fonction φz est absolument arbitraire, et que, par conséquent, si l'on fait, par exemple, $\varphi z = z^3$, le système des équations

$$y^2 + 2zx + z^3 = 0, \quad 2x + 3z^2 - 2 = 0 \dots (122)$$

sera satisfait aussi.

426. Au moyen de ces deux équations entre trois variables, on pourra construire (*note septième*) une courbe à double courbure qui, dans tous ses points, satisfera à la proposée; mais si au lieu de prendre $\varphi z = z^3$ on prenait pour φz une autre fonction de z , on déterminerait une autre courbe à double courbure, qui satisferait également à la proposée; d'où il suit que les équations (121) représentent une suite de courbes à double courbure qui satisfont à la proposée, et qui sont liées entre elles par la propriété commune que leurs équations ne diffèrent entre elles que par les termes représentés par φz et par $\frac{d\varphi z}{dz}$.

Théorie des constantes arbitraires.

427. Une équation étant donnée entre les variables x, y et des constantes, on obtiendra, en la différenciant, une équation qui devra renfermer le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, de sorte qu'on pourra représenter ainsi ces deux équations :

$$F(x, y) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \dots (123).$$

Les variables et les constantes ayant les mêmes valeurs dans ces équations, je puis, en général, éliminer entre elles l'une des constantes; je dis en général, car il y a tel cas particulier où cette élimination deviendrait impraticable; par exemple, si l'on avait l'équation $y = ax + b$, et par conséquent $\frac{dy}{dx} = a$, on pourrait bien éliminer la constante a ; mais, à moins de supposer une relation donnée à part entre a et b , il serait impossible d'éliminer b entre ces équations. Cette remarque suffit pour faire concevoir le sens général que l'on doit donner à toute cette théorie des constantes arbitraires. Pour revenir à notre objet, en éliminant donc une constante entre les équations (123), on obtiendra une équation du premier ordre, qui renfermera une constante de moins que l'équation $F(x, y) = 0$; si l'on différencie deux fois de suite l'équation $F(x, y) = 0$, en y comprenant celle-ci, on aura les équations suivantes :

$$F(x, y) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \dots (124).$$

On peut, entre ces trois équations, éliminer deux constantes; et comme les équations auront toutes été employées à cette

opération, celle qui en résultera devra contenir les mêmes coefficients différentiels, et par conséquent sera du second ordre; mais elle aura deux constantes de moins que l'équation $F(x, y) = 0$; et, en général, on voit que l'équation différentielle de l'ordre n ne peut contenir que n constantes de moins que l'équation $F(x, y) = 0$, de laquelle elle dérive.

428. Soient a et b les constantes qu'on peut éliminer au moyen des équations (124), et qu'on nomme des constantes arbitraires (*); si l'on élimine b entre $F(x, y) = 0$ et l'équation $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, qu'on déduit de cette dernière par la différenciation, on obtiendra une équation différentielle du premier ordre, que nous représenterons par

$$\phi(x, y, \frac{dy}{dx}, a) = 0 \dots (125).$$

D'une autre part, le résultat de l'élimination de a , entre les mêmes équations $F(x, y) = 0$ et $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, nous donne

$$\phi(x, y, \frac{dy}{dx}, b) = 0 \dots (126).$$

429. Si, par un moyen quelconque, on parvenait à trouver les équations 125 et 126, on voit qu'il suffirait d'éliminer entre elles $\frac{dy}{dx}$ pour obtenir l'équation $F(x, y) = 0$. Si l'on

(*) Elles sont ainsi appelées, parce que l'une quelconque de ces constantes peut être regardée comme celle qui dérive de l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. En effet, soit l'équation, ... $f(x, y, a, b, \text{etc.}) = 0$; on en tire $\phi(x, y, b, \text{etc.}) = a$, et en différenciant on a $d\phi(x, y, b, \text{etc.}) = 0$; par conséquent a peut être considéré comme la constante arbitraire qu'on ajouterait à l'intégrale de $d\phi(x, y, b, \text{etc.})$. De même, deux quelconques de ces constantes peuvent être regardées comme provenant de l'intégration d'une équation différentielle du second ordre, et ainsi de suite.

élimine la constante a entre l'équation (125) et celle qu'on en déduirait par la différenciation, et qu'on élimine de même b entre l'équation (126) et celle qu'on en déduirait par la différenciation, on obtiendra deux équations du second ordre, qui ne contiendront plus les constantes arbitraires a et b , et qui, par conséquent, devront coïncider, autrement les valeurs de x et de y ne seraient pas les mêmes dans l'une et dans l'autre; il suit de là qu'une équation différentielle du second ordre peut provenir de deux équations différentielles du premier ordre, qui sont nécessairement différentes, puisque la constante arbitraire de l'une n'est pas la même que la constante arbitraire de l'autre.

Représentons par $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ cette équation différentielle du second ordre, qui provient de l'élimination des constantes arbitraires a et b ; les équations (125) et (126) en sont appelées les intégrales premières, l'équation primitive $F(x, y) = 0$ en est l'intégrale seconde.

430. Appliquons les mêmes considérations à l'équation différentielle du troisième ordre; en différenciant trois fois de suite l'équation $F(x, y) = 0$, nous aurons, en y comprenant cette équation,

$$F(x, y) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0;$$

ces équations admettant les mêmes valeurs pour chacune des trois constantes arbitraires que renferme $F(x, y) = 0$, on peut en général éliminer ces constantes entre ces équations, et obtenir un résultat que nous représenterons par

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0 \dots (127);$$

ce sera l'équation différentielle du troisième ordre de...
 $F(x, y) = 0$, et de laquelle les trois constantes arbitraires
 seront éliminées; réciproquement, $F(x, y) = 0$ sera l'inté-
 grale troisième de l'équation (127).

431. Si l'on élimine successivement chacune des constantes
 arbitraires entre l'équation $F(x, y) = 0$ et celle que l'on en
 tirerait par la différenciation, on obtiendra trois équations
 du premier ordre, qui seront les intégrales secondes de
 l'équation (127).

Enfin, si l'on élimine deux des trois constantes arbi-
 traires, à l'aide de l'équation $F(x, y) = 0$ et des équations
 que l'on en déduira, par deux différenciations successives,
 c'est-à-dire si l'on élimine ces constantes entre les équations

$$F(x, y) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \dots (128),$$

on pourra conserver successivement dans l'équation qui
 proviendra de l'élimination, l'une des trois constantes ar-
 bitraires; par conséquent on aura autant d'équations que
 de constantes arbitraires. Soient donc a, b, c ces con-
 stantes arbitraires; les équations dont nous parlons, con-
 sidérées seulement sous le rapport des constantes arbitraires
 qu'elles renferment, pourront être représentées ainsi :

$$\phi a = 0, \quad \phi b = 0, \quad \phi c = 0 \dots (129).$$

Comme les équations (128) concourent toutes à l'élimina-
 tion qui nous donne l'une de ces dernières, il suit de là que
 les équations (129) seront chacune du second ordre; on les
 appelle les intégrales premières de l'équation (127).

432. En général, une équation différentielle d'un ordre
 n aura un nombre n d'intégrales premières, qui contien-
 dront par conséquent les coefficients différentiels depuis
 $\frac{dy}{dx}$ jusqu'à $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ inclusivement, c'est-à-dire un nombre

$n - 1$ de coefficients différentiels ; et l'on voit que lorsque ces équations sont toutes connues, il suffit d'éliminer entre elles ces coefficients différentiels pour obtenir l'équation primitive.

Des solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

433. Nous avons vu, art. 355, qu'une intégrale particulière pouvait toujours se déduire de l'intégrale complète, en donnant une valeur convenable à la constante arbitraire que renferme cette dernière ; il ne faut pas croire cependant que, pour toute équation différentielle proposée, la valeur qui peut y satisfaire doive toujours se trouver comprise dans l'une de ces intégrales particulières. Par exemple, si l'on avait l'équation

$$dy \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = xdx + ydy \dots (130),$$

dont l'intégrale complète est

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

et qui, par conséquent, étant élevée au carré, devient

$$2cy + c^2 - x^2 + a^2 = 0 \dots (131),$$

il est certain qu'en donnant à c une valeur constante arbitraire, on obtiendra une intégrale particulière, qui aurait la propriété de satisfaire à la proposée. On y peut encore satisfaire par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2 \dots (132);$$

car cette équation étant différenciée, donne $xdx = -ydy$;

cette valeur et celle de $x^2 + y^2$ étant substituées dans l'équation (130), en font détruire tous les termes ; et néanmoins l'équation (132) n'est pas comprise dans l'intégrale complète, car, quelque valeur constante que l'on donne à c dans l'équation* (131), jamais cette équation ne pourra amener l'équation (132), puisque la première étant celle d'une parabole, ne peut, dans aucun cas, devenir l'équation (132), qui est celle d'un cercle.

Cette équation (132), qui satisfait à la proposée sans être renfermée dans l'intégrale complète, s'appelle une solution particulière ou singulière de la proposée. Clairaut, dès 1734, avait remarqué ce fait, et l'on crut long-temps que ces sortes d'équations n'étaient pas liées à l'intégrale complète ; Lagrange fit voir qu'elles en dépendaient, et à ce sujet, exposa la théorie que nous allons développer.

434. Soit $Pdx + Qdy = 0$, une équation différentielle du premier ordre. On peut concevoir cette équation comme provenant de l'élimination d'une constante c entre une certaine équation du même ordre, que nous représenterons par $Mdx + Ndy = 0$, et l'intégrale complète $F(x, y, c) = 0$ de cette équation. Or, dès que tout se réduit à prendre la constante c de manière que l'équation $Pdx + Qdy = 0$, soit le résultat de l'élimination, on sent qu'il est même permis de faire varier cette constante pourvu que l'équation..... $Pdx + Qdy = 0$ ait lieu : dans ce cas, l'intégrale complète $F(x, y, c) = 0$ prendra une plus grande généralité, et représentera une infinité de courbes de même genre, différant les unes des autres par un paramètre, c'est-à-dire par une constante. Cette hypothèse est admissible, puisque, lorsque l'équation $Pdx + Qdy = 0$ est donnée, il est dans l'esprit de l'analyse de ne rejeter aucun des moyens qui ont pu amener cette équation.

435. Supposons donc que l'intégrale complète étant

différenciée, en considérant c comme variable, on ait obtenu

$$Mdx + Ndy + Cdc = 0 \dots (133),$$

équation qui peut se mettre sous ces deux formes :

$$dx + \frac{N}{M} dy + \frac{C}{M} dc = 0, \quad \frac{M}{N} dx + dy + \frac{C}{N} dc = 0.$$

Il est certain que si M et N restant finis, Cdc est nul, le résultat de l'élimination de c entre $F(x,y,c) = 0$, et l'équation (133), sera le même que celui de c entre $F(x,y,c) = 0$ et, l'équation $Mdx + Ndy = 0$, résultat qui, par hypothèse, est $Pdx + Qdy = 0$; car, dans ce cas, l'équation (133), par la raison que Cdc est nul, ne diffère pas de $Mdx + Ndy = 0$; mais pour qu'on puisse avoir $Cdc = 0$, il faut que l'un des facteurs de cette équation soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$dc = 0 \quad \text{ou} \quad C = 0.$$

Dans le premier cas, $dc = 0$ donne $c = \text{constante}$, comme cela a lieu pour les intégrales particulières; dans le second cas, l'équation $C = 0$ renfermera c ou en sera indépendante; si elle renferme c , il peut arriver deux cas, ou l'équation $C = 0$ ne contiendra que des constantes, ou cette équation contiendra c avec des variables; dans le premier cas, l'équation $C = 0$ donnera encore $c = \text{constante}$, et dans le second cas, elle donnera $c = f(x,y)$ (*); cette valeur, étant substituée dans l'équation $F(x,y,c) = 0$, la changera en une autre fonction de x et de y , qui satisfera à la proposée sans

(*) Bien entendu que cette équation renferme comme cas particuliers, ceux où l'on aurait

$$c = fx \quad \text{ou} \quad c = fy.$$

être comprise dans son intégrale complète, et par conséquent en sera une solution singulière; mais on aura une intégrale particulière si l'équation $c=f(x,y)$, au moyen de l'intégrale complète, se réduit à une constante.

436. Lorsque le facteur $C=0$ de l'équation $Cdc=0$ ne contient pas la constante arbitraire c , on connaîtra si l'équation $C=0$ donne lieu à une solution particulière, en combinant cette équation avec l'intégrale complète. Par exemple, si de $C=0$ on tire $x=M$, et qu'on mette cette valeur dans l'intégrale complète $F(x,y,c)=0$, on obtiendra

$$c = \text{constante} = B, \text{ ou } c = fy;$$

dans le premier cas, $C=0$ sera une intégrale particulière; et dans le second, une solution particulière. Voici de quelle manière je crois qu'on peut le démontrer : considérons d'abord le premier cas; c étant une constante arbitraire mettons B à la place de c , dans l'intégrale complète, cette intégrale deviendra $F(x,y,B)=0$; par conséquent puisque $x=M$ réduirait $F(x,y,c)=0$ à $c=B$, $x=M$ changera $F(x,y,B)=0$ en $B=B$; ce qui annonce que les x et les y se détruiront mutuellement; mais, au lieu de tirer $x=M$ de $C=0$ pour en mettre la valeur dans $F(x,y,B)=0$, on peut égaler entre elles les valeurs $x=M$ et $x=N$, tirées des équations $C=0$ et $F(x,y,B)=0$; et, comme ces valeurs de x doivent être identiques, nous pouvons en conclure que $C=0$ n'est autre chose que ce que deviendrait $F(x,y,c)=0$, en y changeant c et B ; c'est-à-dire que $C=0$ est une intégrale particulière.

Dans le second cas où la valeur $x=M$ réduit l'intégrale complète à $c=fy$, si, dans cette intégrale, on change c en fy , on aura $F(x,y,fy)=0$, équation qui deviendra identique en remplaçant x par M , puisque cette valeur réduit $F(x,y,c)=0$ à $c=fy$. Il suit de là que les valeurs de x ,

données par les équations $x = M$ et $F(x, y, fy) = 0$, doivent être identiques, et que, par conséquent, il en est de même de ces équations; la première étant la même que $C = 0$, cette équation est donc, dans le cas présent, ce que devient $F(x, y, c) = 0$, lorsqu'on y change la constante c en en fy ; d'où l'on peut conclure que $C = 0$ est une solution particulière.

437. Appliquons maintenant cette théorie à la recherche des solutions particulières, lorsque l'intégrale complète est donnée.

Soit l'équation

$$ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2} \dots (134),$$

dont l'intégrale complète se détermine par le moyen suivant :

Si l'on divise cette équation par dx , et que l'on fasse $\frac{dy}{dx} = p$, on obtient d'abord

$$y - px = a\sqrt{1 + p^2} \dots (135);$$

différenciant par rapport à x et à p , on a

$$dy - pdx - xdp = \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}};$$

observant que $dy = pdx$, cette équation se réduit à

$$xdp + \frac{apdp}{\sqrt{1 + p^2}} = 0,$$

et l'on y satisfait en faisant $dp = 0$. Cette hypothèse donne $p = \text{constante} = c$, valeur qui étant mise dans l'équation (135), la change en

$$y - cx = a\sqrt{1 + c^2} \dots (136).$$

Cette équation renfermant une constante arbitraire c , qui

n'était pas dans la proposée (134), en est donc l'intégrale complète.

438. Cela posé, la partie Cdc de l'équation (133) s'obtiendra en différenciant l'équation (136) par rapport à c, regardé comme seule variable; en opérant ainsi, on aura

$$xdc + \frac{acd}{\sqrt{1+c^2}} = 0;$$

par conséquent, le coefficient de dc, égalé à zéro, nous donnera

$$x = - \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \dots (137).$$

Pour dégager la valeur de c, élevons cette équation au carré; nous trouverons

$$(1+c^2)x^2 = a^2c^2;$$

d'où nous tirerons

$$c^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}, \quad 1+c^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2} \text{ et } \sqrt{1+c^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

au moyen de cette dernière équation, éliminant le radical de l'équation (137), nous obtiendrons ensuite

$$c = - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots (138) (*).$$

Cette valeur et celle $\sqrt{1+c^2}$, étant mises dans l'équation (136), nous aurons

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

(*) Nous n'avons pas affecté $\sqrt{1+c^2}$ du double signe, parce que x et c étant de signes contraires, dans l'équation (137), il faut qu'il en soit de même dans l'équation (138).

d'où nous tirerons

$$y = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2};$$

équation qui, étant élevée au carré, nous donnera

$$y^2 = a^2 - x^2;$$

et l'on voit que cette équation est effectivement une solution particulière, car, en la différenciant, on obtient $dy = -\frac{x dx}{y}$; cette valeur et celle de $\sqrt{x^2 + y^2}$, étant substituées dans l'équation (134), la réduisent à $a^2 = a^2$.

439. Clairaut remarqua le premier une classe générale d'équations susceptibles d'une solution particulière; ces équations sont renfermées dans la suivante :

$$y = \frac{dy}{dx} x + F\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

équation que nous pourrions représenter par

$$y = px + Fp \dots (139);$$

différenciant, nous trouverons

$$dy = p dx + x dp + \frac{dFp}{dp} dp;$$

cette équation, à cause de $dy = p dx$, se réduit à

$$x dp + \frac{dFp}{dp} dp = 0;$$

et comme dp est facteur commun, elle peut s'écrire ainsi :

$$\left(x + \frac{dFp}{dp}\right) dp = 0.$$

On satisfait à cette équation en faisant $dp = 0$, ce qui donne $p = \text{constante} = c$; par conséquent, en substituant cette

valeur dans l'équation (139), nous trouverons

$$y = cx + Fc;$$

cette équation est l'intégrale complète de la proposée, puisqu'une constante arbitraire c a été introduite par l'intégration. Si l'on différencie cette équation par rapport à c , on aura

$$\left(x + \frac{dFc}{dc}\right)dc;$$

par conséquent, en égalant à zéro le coefficient de dc , on a l'équation

$$x + \frac{dFc}{dc} = 0,$$

qui, par la substitution de c dans l'intégrale complète, donnera la solution particulière.

Des équations linéaires.

440. Une équation différentielle entre deux variables x et y , est linéaire lorsque les expressions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ ne sont élevées, dans cette équation, qu'au premier degré : ainsi, en supposant que $A, B, C, D, \dots, N, X$, soient des fonctions de x , l'équation linéaire du n^{me} ordre sera

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} + \dots + N \frac{d^ny}{dx^n} = X \dots (140).$$

441. Lorsque cette équation est du premier degré, elle se réduit à

$$Ay + B \frac{dy}{dx} = X;$$

chassant le dénominateur, et divisant par B , on peut la mettre sous cette forme

$$dy + Pydx = Qdx,$$

et nous avons vu, art. 385, que cette équation avait pour intégrale

$$y = e^{-\int Pdx} \left[\int Qe^{\int Pdx} dx + C \right].$$

442. Lorsque le terme en X est nul dans l'équation (140), si un nombre n de valeurs particulières, p, q, r , etc., mises successivement à la place de y , ont chacune la propriété d'y satisfaire, il suffira de multiplier p, q, r , etc., par des constantes arbitraires a, b, c , etc., pour conclure que l'intégrale finie complète de cette équation est

$$y = ap + bq + cr, \text{ etc.}$$

La démonstration de cette proposition étant la même pour tous les degrés, nous ne considérerons que l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \dots (141).$$

En mettant successivement à la place de y les valeurs hypothétiques p, q, r , nous aurons

$$Ap + B \frac{dp}{dx} + C \frac{d^2p}{dx^2} + D \frac{d^3p}{dx^3} = 0,$$

$$Aq + B \frac{dq}{dx} + C \frac{d^2q}{dx^2} + D \frac{d^3q}{dx^3} = 0,$$

$$Ar + B \frac{dr}{dx} + C \frac{d^2r}{dx^2} + D \frac{d^3r}{dx^3} = 0;$$

multipliant ces trois équations, la première par a , la seconde par b et la troisième par c , et ajoutant les résultats, on trouve

$$A(ap + bq + cr) + B\left(a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx}\right) + C\left(a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2}\right) + D\left(a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3}\right) = 0.$$

Or, il est évident que cette expression, qui est identiquement nulle, est la même que celle qu'on obtiendrait en faisant $y = ap + bq + cr$, dans l'équation (141); donc cette valeur de y satisfait à l'équation (141); et, comme elle renferme trois constantes arbitraires, elle est l'intégrale finie complète de l'équation (141).

443. Lorsque X n'est pas nul dans l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} = X \dots (142),$$

si l'on peut trouver trois valeurs particulières p, q, r , qui, mises successivement à la place de y , satisfassent chacune à l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + D \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \dots (143),$$

L'intégrale finie complète de l'équation (142) sera

$$y = ap + bq + cr \dots (144);$$

mais alors a , b , c , au lieu d'être des constantes, seront des fonctions de x , que nous apprendrons bientôt à déterminer.

444. Pour démontrer ce théorème, différencions l'équation (144), et divisons-la par dx ; nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx} + p \frac{da}{dx} + q \frac{db}{dx} + r \frac{dc}{dx}.$$

Disposons des indéterminées a , b , c , par trois conditions : par la première, faisons

$$p \frac{da}{dx} + q \frac{db}{dx} + r \frac{dc}{dx} = 0 \dots (145);$$

il restera

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx}.$$

Une nouvelle différenciation nous donnera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2} + \frac{da}{dx} \frac{dp}{dx} + \frac{db}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx} \frac{dr}{dx} \dots (146).$$

Pour remplir la seconde condition, posons

$$\frac{da}{dx} \frac{dp}{dx} + \frac{db}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{dc}{dx} \frac{dr}{dx} = 0 \dots (147),$$

il restera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2};$$

différenciant encore et divisant par dx , il viendra

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3} + \frac{da}{dx} \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx} \frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dc}{dx} \frac{d^2r}{dx^2}.$$

Pour remplir la troisième condition, nous supposons

$$\frac{da}{dx} \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{db}{dx} \frac{d^2q}{dx^2} + \frac{dc}{dx} \frac{d^2r}{dx^2} = \frac{X}{D} \dots (148),$$

et l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3} + \frac{X}{D}.$$

Je dis maintenant que la valeur $y = ap + bq + cr$, satisfait à l'équation (142); car mettant dans cette équation la valeur de y , et par conséquent celles de ses coefficients différentiels, que nous venons de déterminer, et effaçant les termes en X , qui se détruisent, on trouve

$$A(ap + bq + cr) + B\left(a \frac{dp}{dx} + b \frac{dq}{dx} + c \frac{dr}{dx}\right) + C\left(a \frac{d^2p}{dx^2} + b \frac{d^2q}{dx^2} + c \frac{d^2r}{dx^2}\right) + D\left(a \frac{d^3p}{dx^3} + b \frac{d^3q}{dx^3} + c \frac{d^3r}{dx^3}\right) = 0 \dots (149).$$

445. Comme on ne sait pas si la valeur donnée à y fait détruire mutuellement tous les termes de l'équation 149, il s'agit maintenant de démontrer que cette équation est identiquement nulle. Pour cet effet, p , q , r satisfaisant à l'équation (143), on a

$$Ap + B \frac{dp}{dx} + C \frac{d^2p}{dx^2} + D \frac{d^3p}{dx^3} = 0,$$

$$Aq + B \frac{dq}{dx} + C \frac{d^2q}{dx^2} + D \frac{d^3q}{dx^3} = 0;$$

$$Ar + B \frac{dr}{dx} + C \frac{d^2r}{dx^2} + D \frac{d^3r}{dx^3} = 0;$$

multipliant la première de ces équations par a , la deuxième par b et la troisième par c , et ajoutant les résultats, on trouvera une équation identiquement nulle, qui sera la même que l'équation (149).

446. Pour déterminer a , b , c , les coefficients différentiels $\frac{da}{dx}$, $\frac{db}{dx}$, $\frac{dc}{dx}$ n'entrant qu'au premier degré dans les équations de condition (145); (147) et (148), nous pouvons éliminer deux de ces coefficients différentiels, et nous trouverons l'autre en fonction des expressions $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, etc., qui sont des fonctions de x déterminées, puisqu'on connaît p , q , r , etc.; nous aurons donc des équations de la forme

$$\frac{da}{dx} = X_1, \quad \frac{db}{dx} = X_2, \quad \frac{dc}{dx} = X_3,$$

ou

$$da = X_1 dx, \quad db = X_2 dx, \quad dc = X_3 dx,$$

et en intégrant, on déterminera a , b et c .

447. Ce théorème est applicable au cas où l'équation linéaire serait d'ordre

ordre quelconque, par conséquent l'intégration de ces équations se réduit à celle de l'équation

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + N \frac{d^ny}{dx^n} = 0 \dots (150).$$

448. Lorsque l'équation linéaire de l'ordre n a des coefficients constants, il est facile d'en déterminer l'intégrale. En effet, si dans l'équation (150) on fait $y = e^{mx}$, on trouvera, en différenciant,

$$\frac{dy}{dx} = e^{mx}m, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx}m^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = e^{mx}m^3, \text{ etc. ;}$$

substituant ces valeurs dans l'équation (150), on obtiendra

$$e^{mx}(A + Bm + Cm^2 + \dots + Nm^n) = 0 \dots (151);$$

soient $m', m'', m''', \text{ etc.}$, les racines de l'équation

$$A + Bm + Cm^2 + \dots + Nm^n = 0 \dots (152),$$

l'équation (150) sera satisfaite par ces valeurs

$$y = e^{m'x}, \quad y = e^{m''x}, \quad y = e^{m'''x}, \text{ etc. ;}$$

et comme on a n valeurs de y , l'intégrale finie complète de l'équation (150) sera

$$y = ae^{m'x} + be^{m''x} + ce^{m'''x} + \text{etc.}$$

449. Lorsque $m' = m''$, les termes $ae^{m'x}$ et $be^{m''x}$ se réduisent à $(a + b)e^{m'x}$, et alors la somme $a + b$ devant être considérée comme une seule constante, on ne trouve plus un nombre n de constantes arbitraires dans l'expression de y . Dans ce cas, il est démontré que si $y = e^{m'x}$ satisfait à la proposée, la valeur $y = xe^{m'x}$ doit aussi y satisfaire. En effet, en différenciant cette dernière équation on trouve

$$\frac{dy}{dx} = xe^{m'x}m' + e^{m'x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = xe^{m'x}m'^2 + 2e^{m'x}m',$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^{m'x}m'^3 + 3e^{m'x}m'^2, \text{ etc. ;}$$

ces valeurs réduisent l'équation (150) à

$$xe^{m'x}(A + Bm' + Cm'^2 + Dm'^3 + \text{etc.}) + e^{m'x}(B + 2Cm' + 3Dm'^2 + \text{etc.}) \dots (153).$$

Or, l'équation (152) ayant par hypothèse deux racines égales, on sait,

par la théorie des équations, que l'expression $B + 2Cm + 3Dm^2 + \text{etc.}$, en renfermera une de moins que la proposée, et s'annulera lorsqu'on sera $m = m'$, d'où il suit que l'expression (153) est identiquement nulle. Par conséquent, l'équation (150) sera satisfaite par la valeur $y = x e^{m'x}$, et aura pour intégrale complète

$$y = a e^{m'x} + b x e^{m'x} + c x^2 e^{m'x} + \text{etc.}$$

450. S'il y avait trois racines égales à m , on prouverait de même que l'équation (150) serait satisfaite en faisant

$$y = e^{mx} + x e^{mx} + x^2 e^{mx};$$

ainsi de suite.

451. Lorsque l'équation (152) a des racines imaginaires, si l'une de ses racines est $h + k \sqrt{-1}$, l'autre sera $h - k \sqrt{-1}$, et l'on aura, dans la valeur de y , ces deux termes

$$a e^{(h+ik\sqrt{-1})x} + b e^{(h-ik\sqrt{-1})x},$$

on

$$e^{hx} [a e^{ikx\sqrt{-1}} + b e^{-ikx\sqrt{-1}}] \dots (154).$$

Or on sait qu'on a, en général, *note troisième*, la formule

$$e^{\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}, \quad e^{-\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1};$$

en comparant l'expression (154) à ces formules, nous pourrions remplacer

$$e^{ikx\sqrt{-1}} \text{ par } \cos kx + \sin kx \sqrt{-1},$$

et

$$e^{-ikx\sqrt{-1}} \text{ par } \cos kx - \sin kx \sqrt{-1},$$

et la formule (154) deviendra

$$e^{hx} [a \cos kx + a \sin kx \sqrt{-1} + b \cos kx - b \sin kx \sqrt{-1}],$$

expression qui peut s'écrire ainsi :

$$e^{hx} [(a+b) \cos kx + (a-b) \sin kx \sqrt{-1}] \dots (155).$$

Quand X est nul dans l'équation (140), a , b , c étant des constantes arbitraires, art. 442, nous pouvons supposer $a+b=c$, $a-b=c' \sqrt{-1}$; alors la partie imaginaire qui est dans l'expression (154) s'évanouira.

De l'intégration des équations simultanées.

452. Proposons nous maintenant d'intégrer à la fois deux ou plusieurs équations différentielles.

Soient

$$\left. \begin{aligned} My + Nx + P \frac{dy}{dt} + Q \frac{dx}{dt} &= T \\ M'y + N'x + P' \frac{dy}{dt} + Q' \frac{dx}{dt} &= T' \end{aligned} \right\} \dots (156),$$

les équations les plus générales du premier degré entre x et y , et les coefficients différentiels $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, et dans lesquelles les coefficients M , N , P , etc., sont des fonctions de la variable indépendante t ; on peut écrire ainsi ces équations :

$$\begin{aligned} (My + Nx)dt + Pdy + Qdx &= Tdt; \\ (M'y + N'x)dt + P'dy + Q'dx &= T'dt, \end{aligned}$$

si l'on multiplie la seconde par une fonction θ de t , et qu'on ajoute les résultats, on obtiendra

$$[(M+M'\theta)y + (N+N'\theta)x]dt + (P+P'\theta)dy + (Q+Q'\theta)dx = (T+T'\theta)dt;$$

en représentant les quantités qui sont entre les parenthèses par une seule lettre; cette équation peut s'écrire ainsi :

$$Hydt + Kxdt + Rdy + Sdx = Tdt;$$

on en tire

$$H\left(y + \frac{K}{H}x\right)dt + R\left(dy + \frac{S}{R}dx\right) = Tdt \dots (157),$$

équation qui sera de même forme que l'équation

$$dy + Pydx = Qdx \dots (158),$$

que nous avons intégrée art. 385, et

$$d\left(y + \frac{K}{H}x\right) = dy + \frac{S}{R}dx \dots (159),$$

parce qu'alors en faisant

$$y + \frac{K}{H}x = z \dots (160),$$

l'équation (157) deviendra

$$Hsdz + Rdz = Tdz,$$

ou

$$dz + \frac{H}{R}adz = \frac{T}{R}dz \dots (161);$$

et l'on voit que cette équation est de même forme que l'équation (155), puisque $\frac{H}{R}$ et $\frac{T}{R}$ sont des fonctions de la variable indépendante t .

453. Pour satisfaire à l'équation (159), il suffit que l'on ait

$$d\left(\frac{K}{H}x\right) = \frac{S}{R} dx;$$

et en exécutant la différenciation indiquée, d'après l'article 14, on trouvera

$$\frac{K}{H} dx + x d\frac{K}{H} = \frac{S}{R} dx;$$

pour que cette équation soit satisfaite, il faut, en général, que les multiplicateurs de dx soient égaux, et que, par conséquent, le terme... $x d\frac{K}{H}$ soit nul; c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{K}{H} = \frac{S}{R}, \quad d\frac{K}{H} = 0 \dots (162).$$

On remettra dans ces équations les valeurs des expressions K , H , S et R , et ayant effectué la différenciation indiquée, on éliminera δ , renfermé dans ces équations, et l'on aura la relation qui doit subsister entre les coefficients, pour que l'équation de condition soit satisfaite.

454. Dans le cas où les coefficients des premiers membres des équations (156) sont constants, la différentielle d'une constante étant égale à zéro, il ne reste que la première des équations (162); elle suffira pour déterminer le facteur δ , qui alors sera constant puisqu'il sera égal à une fonction de constantes. En remettant pour K , H , R , S leurs valeurs, on a

$$\frac{N + N'\delta}{M + M'\delta} = \frac{Q + Q'\delta}{P + P'\delta},$$

et en faisant évanouir les dénominateurs, on voit que δ doit être déterminé par une équation du second degré, nommant δ' et δ'' ces valeurs de δ , et supposons qu'après les avoir substituées successivement dans l'équation (161) les coefficients de zdt et de dt deviennent, dans le premier cas, p' et q' ; et dans le second p'' et q'' , on aura

$$\begin{aligned} dz + p'zdt &= q'dt, \\ dz + p''zdt &= q''dt; \end{aligned}$$

intégrant d'après la formule (90), page 277, on trouvera

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int p' dt} \left[\int q' e^{\int p' dt} dt + C' \right], \\ z &= e^{-\int p'' dt} \left[\int q'' e^{\int p'' dt} dt \right] + C''. \end{aligned}$$

On substituera dans ces valeurs celle de z , tirée de l'équation (160), et l'on aura deux équations en x , en y et en t .

455. Si, excepté T , T' et T'' , que nous regarderons toujours comme des fonctions de t , les coefficients M , N , P , Q , etc., sont constans, et qu'on ait les trois équations

$$\begin{aligned} dy + (My + Nx + Pz)dt &= Tdt, \\ dx + (M'y + N'x + P'z)dt &= T'dt, \\ dz + (M''y + N''x + P''z)dt &= T''dt, \end{aligned}$$

on multipliera la seconde par une constante θ , et la troisième par une autre constante θ' ; et ajoutant les résultats, on aura une équation que nous pourrions représenter par

$$dy + \theta dx + \theta' dz + Q(y + Rx + Sz)dt = Udt.$$

Or, pour que cette équation soit de la forme

$$dy + Pydx = Qdx,$$

il faut qu'en regardant la fonction $y + Rx + Sz$ comme une seule variable y' , la différentielle dy' de cette fonction soit égale à $dy + \theta dx + \theta' dz$, ce qui exige que l'on ait les équations de conditions

$$\theta = R, \quad \theta' = S;$$

R et S n'étant que des fonctions de θ et de θ' , en vertu des opérations précédentes, il en résulte que ces équations suffiront pour déterminer les diverses valeurs des constantes θ et θ' .

456. Cette méthode est générale, et s'applique même aux équations différentielles des ordres supérieurs, parce que ces équations peuvent se réduire au premier degré. Si l'on avait, par exemple, les équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} + My + Nx + P \frac{dy}{dt} + Q \frac{dx}{dt} = T,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = M'y + N'x + P' \frac{dy}{dt} + Q' \frac{dx}{dt} = T',$$

ou plutôt

$$\left. \begin{aligned} d^2y + (My + Nx)dt^2 + (Pdy + Qdx)dt &= Tdt^2, \\ d^2x + (M'y + N'x)dt^2 + (P'dy + Q'dx)dt &= T'dt^2 \end{aligned} \right\} \dots (163),$$

on ferait

$$dy = p dt, \quad dx = q dt \dots (164);$$

et en observant que dt est constant, ces équations deviendraient

$$\begin{aligned} dp + (My + Nx + Pp + Qq)dt &= Tdt, \\ dq + (M'y + N'x + P'p + Q'q)dt &= T'dt; \end{aligned}$$

ces deux équations, avec les équations (164), forment quatre équation du premier degré, auxquelles on peut appliquer les procédés précédens.

De l'intégration d'une équation différentielle du second ordre.

457. La formule générale des équations différentielles du second ordre à deux variables est

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \dots (165).$$

Nous ne chercherons pas à intégrer cette équation dans ce degré de généralité; mais nous allons examiner comment on en peut trouver l'intégrale dans des cas particuliers.

458. Considérons d'abord l'hypothèse où l'on a

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \dots (166);$$

pour intégrer cette équation on fera $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, et elle se réduira à

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) \dots (167).$$

Si cette équation peut s'intégrer, et qu'on en tire $p = X$, on obtiendra facilement la valeur de y , car l'équation....

$\frac{dy}{dx} = p$ nous donnant $y = \int p dx$, si l'on substitue dans cette équation la valeur de p , on aura $y = \int X dx$; mais si l'équation (167), au lieu de donner la valeur de p en x , donnait celle de x en fonction de p , de manière qu'on eût

$x = P$ en intégrant par parties $dy = p dx$, on aurait d'abord

$$y = px - \int x dp;$$

mettant dans cette équation la valeur de x , on trouverait

$$y = px - \int P dp.$$

459. Considérons maintenant le cas où l'on a

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \dots (168);$$

en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, on trouverait $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; et en remplaçant dx par sa valeur $\frac{dy}{p}$, cette équation deviendrait

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p dp}{dy}.$$

Mettant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation (168), on la convertirait en

$$f(y, p, dy, dp) = 0;$$

si cette équation peut donner $p = Y$, on substituerait cette valeur dans l'équation $dx = \frac{dy}{p}$, et l'on obtiendra en intégrant,

$$x = \int \frac{dy}{Y};$$

si au contraire y se détermine en fonction de p , et que l'on ait par conséquent $y = P$, pour avoir x , on intégrera par parties l'équation $dx = \frac{dy}{p}$, et l'on aura

$$x = \frac{y}{p} + \int y \frac{dp}{p^2};$$

et en substituant dans cette équation la valeur de y , on trouvera

$$x = \frac{y}{p} + \int p \frac{dp}{p^2};$$

et ayant intégré, on éliminera ensuite p au moyen de l'équation $y = P$.

460. Lorsque l'équation (165) ne renferme avec $\frac{d^2y}{dx^2}$, que l'une des trois quantités $\frac{dy}{dx}$, x et y , nous avons, dans le premier cas,

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \dots (169);$$

faisant $\frac{dy}{dx} = p$, et par conséquent $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, on substituera ces valeurs dans l'équation (169), et l'on aura

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

On tire de cette équation

$$\frac{dp}{dx} = P \dots (170),$$

et par conséquent

$$x = \int \frac{dp}{P} \dots (171).$$

D'une autre part, l'équation $\frac{dy}{dx} = p$ nous donne

$$y = \int p dx;$$

et en y substituant la valeur de dx , donnée par l'équation (170), on obtient

$$y = \int \frac{p dp}{P} \dots (172),$$

Lorsqu'on aura intégré les équations (171 et 172), on éliminera entre elles la quantité p , pour avoir une équation en x et en y .

461. Dans le cas où $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne se trouve combiné qu'avec une fonction de x , on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X;$$

multipliant par dx et intégrant, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \int X dx + C,$$

représentant par X' l'intégrale indiquée dans cette équation, on a

$$\frac{dy}{dx} = X' + C;$$

multipliant de nouveau par dx , et intégrant, on obtient

$$y = \int X' dx + Cx + C'.$$

462. Enfin, lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ est donné en fonction de y , il s'agit d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y.$$

Pour y parvenir, on la multipliera par $2y$, ce qui donnera

$$2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 2Ydy;$$

le premier membre étant composé comme la différentielle de x^2 , on trouvera, en intégrant,

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \int 2Ydy + C;$$

et en tirant la racine carrée, on obtiendra

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C + 2 \int Y dy};$$

d'où l'on tirera, par une nouvelle intégration,

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2 \int Y dy}} + C'.$$

Des équations différentielles partielles du premier ordre.

463. Une équation qui subsiste entre des coefficients différentiels, combinés, selon le cas, avec des variables et des constantes, est, en général, une équation différentielle partielle, ou, suivant l'ancienne dénomination, est une équation aux différences partielles. On a appelé ainsi ces équations, parce que la notation des coefficients différentiels qu'elles renferment indique, comme nous l'avons vu art. 52, que la différenciation ne peut être effectuée que partiellement, c'est-à-dire en regardant certaines variables comme constantes. Cela suppose donc que la fonction proposée ne contienne pas qu'une seule variable. Pour plus de simplicité, nous n'en supposerons que deux, et nous considérerons d'abord les équations différentielles partielles du premier ordre, qui sont celles qui ne renferment qu'un ou plusieurs coefficients différentiels du premier ordre.

464. La première équation que nous commencerons à intégrer est la suivante :

$$\frac{dz}{dx} = a.$$

Si, contre notre hypothèse, z au lieu d'être fonction de

deux variables x et y , ne contenait que x , on aurait une équation différentielle ordinaire qui, étant intégrée, donnerait $z = ax + c$; mais, dans le cas présent, z étant une fonction de x et de y , les y renfermés dans z ont dû disparaître à la différenciation, puisqu'en différenciant par rapport à x , nous avons regardé y comme constant. Nous devons donc en intégrant, conserver la même hypothèse, et supposer que la constante arbitraire est en général une fonction de y ; par conséquent nous aurons pour l'intégrale de l'équation proposée,

$$z = ax + \phi y.$$

465. Cherchons encore à intégrer l'équation différentielle partielle

$$\frac{dz}{dx} = X,$$

dans laquelle X est une fonction de x ; multipliant par dx et intégrant, nous trouverons

$$z = \int X dx + \phi y.$$

466. Par exemple, si la fonction représentée par X , était $x^3 + a^3$, l'intégrale serait

$$z = \frac{x^4}{4} + a^3 x + \phi y.$$

467. On ne trouvera pas plus de difficulté à intégrer l'équation

$$\frac{dz}{dx} = Y,$$

et l'on aura

$$z = Yx + \phi y.$$

468. On intégrera de la même manière toute équation dans laquelle $\frac{dz}{dx}$ égalera une fonction de deux variables

x et y . Si l'on a, par exemple,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{ay + x^2}},$$

en regardant y comme constant, on intégrera d'après l'article 271, après avoir multiplié par dx ; et en nommant ϕy la constante qu'on doit ajouter à l'intégrale, on aura

$$z = \sqrt{ay + x^2} + \phi y.$$

469. Enfin, si l'on veut intégrer l'équation

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}},$$

on regardera toujours y comme constant, et l'on aura, article 274,

$$z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right) + \phi y.$$

470. En général, pour intégrer l'équation

$$dz = F(x, y) dx,$$

on prendra l'intégrale par rapport à x , et ajoutant ensuite une constante fonction de y , pour la compléter; on trouvera

$$z = \int F(x, y) dx + \phi y.$$

471. D'après ce qui précède, on voit qu'à part l'hypothèse de l'une des variables constante, et de l'introduction, dans l'intégrale, d'une constante fonction de cette variable, on suit le même procédé que dans l'intégration des équations différentielles ordinaires.

472. Considérons maintenant les équations différentielles partielles qui contiennent deux coefficients différentiels du premier ordre; et soit l'équation

$$M \frac{dz}{dx} + N \frac{dz}{dy} = 0,$$

dans laquelle M et N représentent des fonctions données de x et de y ; on en tire

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{M}{N} \frac{dz}{dx};$$

substituant cette valeur dans la formule

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \dots (173),$$

qui n'a d'autre sens que d'exprimer la condition que z est fonction de x et de y , on obtient

$$dz = \frac{dz}{dx} \left(dx - \frac{M}{N} dy \right),$$

ou

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{Ndx - Mdy}{N}.$$

Soit λ le facteur propre à rendre $Ndx - Mdy$ une différentielle exacte ds ; nous aurons

$$\lambda(Ndx - Mdy) = ds \dots (174).$$

Au moyen de cette équation, nous éliminerons $Ndx - Mdy$ de la précédente, et nous obtiendrons

$$dz = \frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} \cdot ds.$$

Enfin, si l'on remarque que la valeur de $\frac{dz}{dx}$ n'est point déterminée, on peut la prendre telle que $\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} ds$ puisse s'intégrer, ce qui exige que $\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx}$ soit une fonction de s ; car on sait que la différentielle de toute fonction donnée de s , doit

être de la forme $Fs \cdot ds$. Il suit donc de là qu'on doit avoir

$$\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} = Fs,$$

équation qui changera la précédente en

$$dz = Fs \cdot ds;$$

d'où l'on tirera

$$z = \phi s. \quad (175).$$

473. Si l'on intègre par ce moyen l'équation

$$x \frac{dz}{dy} - y \frac{dz}{dx} = 0. \quad (176),$$

nous avons dans ce cas $M = -y$, $N = x$,* et par conséquent l'équation (174) deviendra

$$ds = \lambda(xdx + ydy).$$

Il est visible que le facteur λ , propre à rendre intégrable le second membre de cette équation, est 2. Substituant cette valeur à λ et intégrant, on a

$$s = x^2 + y^2;$$

mettant cette valeur dans l'équation (175), nous aurons pour l'intégrale de l'équation (176),

$$z = \phi(x^2 + y^2).$$

474. Soit maintenant l'équation

$$P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} + R = 0. \quad (177),$$

dans laquelle P , Q et R sont des fonctions des variables x , y et z ; en divisant par P , et en faisant $\frac{Q}{P} = M$, $\frac{R}{P} = N$, nous pourrons la mettre sous cette forme :

$$\frac{dz}{dx} + M \frac{dz}{dy} + N = 0. \dots (178);$$

et en faisant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, elle deviendra

$$p + Mq + N = 0. \dots (179).$$

Cette équation établit une relation entre les coefficients p et q de la formule générale

$$dz = p dx + q dy. \dots (180);$$

sans cette relation, p et q seraient entièrement arbitraires dans cette formule; car, comme cela a déjà été observé, elle n'a d'autre sens que d'indiquer que z est une fonction de deux variables x et y ; et cette fonction peut être quelconque; ainsi, nous devons regarder, dans l'équation (180), p et q comme deux indéterminées; éliminant p au moyen de l'équation (179), nous obtiendrons

$$dz + N dx = q (dy - M dx). \dots (181),$$

et q restera toujours indéterminé; mais l'on sait (voyez la note seconde) que lorsqu'une équation de ce genre a lieu, quel que soit q , il faut que l'on ait séparément

$$dz + N dx = 0, \quad dy - M dx = 0. \dots (182).$$

475. Si P , Q et R ne contiennent pas la variable z , il en sera de même de M et de N ; alors la seconde des équations (182) sera une équation à deux variables x et y , et pourra devenir une différentielle exacte à l'aide d'un facteur λ , de sorte qu'en appelant ds cette différentielle exacte, nous aurons

$$ds = \lambda(dy - M dx) \dots (183).$$

Tirant de cette équation la valeur de $dy - M dx$, et la sub-

stituée, ainsi que celle de q , dans l'équation (181), nous trouverons

$$dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{\lambda} - N dx \dots (184).$$

D'une autre part, l'équation (183), qui ne contient dans son second membre que des x et des y , étant intégrée, donnera

$$s = F(x, y);$$

la valeur de y , tirée de cette équation, étant mise dans l'équation (184), en réduira le second membre à une fonction des variables x et s . Intégrant, par rapport à x , d'après l'art. 470, nous appliquerons le signe d'intégration au terme qui contient la différentielle dx , et ajoutant une constante fonction de l'autre variable s , nous aurons

$$z = - \int N dx + \phi s \dots (185).$$

476. Pour donner un exemple de cette intégration, prenons l'équation

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = a \sqrt{x^2 + y^2};$$

nous avons, dans ce cas,

$$M = \frac{y}{x}, \quad N = -a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x};$$

la valeur de M étant substituée dans l'équation (183), la changera en

$$ds = \lambda \left(dy - \frac{y}{x} dx \right),$$

ou plutôt en

$$ds = \lambda \left(\frac{x dy - y dx}{x} \right),$$

équation intégrable si l'on fait $\lambda = \frac{1}{x}$, art. 19, ce qui

donnera

$$s = \frac{y}{x};$$

cette valeur de s et celle de N , étant substituées dans l'équation (185), on obtiendra

$$z = a \int dx \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} + \phi \frac{y}{x},$$

ou plutôt

$$z = a \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \phi \frac{y}{x}.$$

477. Dans le cas plus général, où les coefficients P, Q, R , de l'équation (177), contiennent les trois variables x, y, z , il peut arriver que les équations (182) ne renferment chacune que les deux variables qui sont en évidence, et que, par conséquent, on puisse les mettre sous les formes

$$dz = f(x, z) dx = 0, \quad dy = F(x, y) dx.$$

On ne peut intégrer isolément ces équations, en écrivant, comme dans l'art. 470,

$$z = \int f(x, z) dx + \phi z, \quad y = \int F(x, y) dx + \phi y,$$

car alors on voit qu'il faudrait supposer z constant dans la première équation, et y constant dans la seconde; hypothèses contradictoires, puisque l'une des trois coordonnées x, y, z , ne peut être supposée constante dans la première équation sans qu'elle ne le soit dans la seconde.

478. Voici donc de quelle manière on intégrera les équations (182), dans le cas où elles ne renferment chacune que les deux variables qui sont en évidence; soient μ et λ les facteurs qui rendent les équations (182) des différentielles exactes; si nous représentons ces différentielles par dU et par

dV , nous aurons

$$\lambda(dz + Ndx) = dU, \quad \mu(dy - Mdx) = dV;$$

au moyen de ces valeurs, l'équation (181) deviendra

$$dU = q \frac{\lambda}{\mu} dV \dots (186).$$

Comme le premier membre de cette équation est une différentielle exacte, il faut qu'il en soit de même du second, ce qui exige que $q \frac{\lambda}{\mu}$ soit une fonction de V ; représentant cette fonction par ϕV , l'équation (186) deviendra

$$dU = \phi V \cdot dV;$$

d'où l'on tirera, en intégrant,

$$U = \phi V.$$

479. Prenons pour exemple l'équation

$$xy \frac{dz}{dx} + x^2 \frac{dz}{dy} = yz;$$

étant écrite ainsi :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{y} \frac{dz}{dy} - \frac{z}{x} = 0,$$

on la comparera à l'équation (178), et l'on aura

$$M = \frac{x}{y}, \quad -N = -\frac{z}{x};$$

au moyen de ces valeurs, les équations (182) deviendront

$$dz - \frac{z}{x} dx = 0, \quad dy - \frac{x}{y} dx = 0;$$

et en faisant évanouir les dénominateurs, on aura

$$xdz - zdx = 0, \quad ydy - xdx = 0.$$

Les facteurs propres à rendre ces équations intégrables, sont $\frac{1}{x^2}$ et 2; en les substituant et en intégrant, on trouve $\frac{z}{x}$ et $y^2 - x^2$ pour les intégrales; mettant donc ces valeurs à la place de U et de V, dans l'équation $U = \phi V$, nous obtiendrons, pour l'intégrale de la proposée,

$$\frac{z}{x} = \phi(y^2 - x^2).$$

480. Il est à remarquer que si l'on eût éliminé q au lieu de p , les équations (182) eussent été remplacées par celles-ci :

$$Mdz + Ndy = 0, \quad dy - Mdx = 0 \dots (187);$$

et comme tout ce que nous avons dit des équations (182), peut s'appliquer à celles-ci, il s'ensuit que, dans le cas où la première des équations (182) ne serait pas intégrable, on a le droit de remplacer ces équations par le système des équations (187), ce qui revient à employer la première des équations (187) à la place de la première des équations (182), alors on verra si l'intégration est possible.

481. Par exemple, si l'on avait

$$xz \frac{dz}{dx} - zx \frac{dz}{dy} + xy = 0;$$

cette équation, divisée par az et comparée à l'équation (178), nous donnerait

$$M = -\frac{x}{a}, \quad N = \frac{xy}{az};$$

par conséquent, les équations (182) deviendraient

$$dz + \frac{xy}{az} dx = 0, \quad dy + \frac{x}{a} dx = 0;$$

à la faculté de prendre pour a une fonction arbitraire de b : cette condition sera exprimée par l'équation $a = \phi b$ (note huitième); par conséquent, nous aurons les équations $U = \phi b$, $V = b$, dans lesquelles x , y et z représentent les mêmes coordonnées; si l'on élimine b entre ces équations, on obtiendra $U = \phi V$.

On peut encore observer que cette équation nous dit qu'en faisant $V = b$, on doit avoir $U = \phi b = \text{constante}$; c'est-à-dire que U et V sont constans en même temps, sans que a et b dépendent l'un de l'autre, puisque la fonction ϕ est arbitraire. Or, c'est précisément la condition qui nous est donnée par les équations $U = a$ et $V = b$.

483. Pour donner une application de ce théorème, soit

$$zx \frac{dz}{dx} - zy \frac{dz}{dy} - y^2 = 0.$$

Après avoir divisé par zx , nous comparerons cette équation à l'équation (178), ce qui nous donnera

$$M = -\frac{y}{x}, \quad N = -\frac{y^2}{zx},$$

et les équations (182) deviendront

$$dz - \frac{y^2}{zx} dx = 0, \quad dy + \frac{y}{x} dx = 0,$$

ou

$$zxdz - y^2dx = 0, \quad xdy + ydx = 0;$$

la première de ces équations contenant trois variables, nous ne chercherons pas à l'intégrer en cet état; mais si l'on y substitue la valeur de ydx , tirée de la seconde, elle acquiert un facteur commun x qui, étant supprimé, la réduit à

$$zdz + ydy = 0,$$

et l'on voit qu'en la multipliant par 2, elle devient inté-

grable; l'autre équation l'étant aussi, on trouvera, en les intégrant,

$$z^2 + y^2 = a, \quad xy = b;$$

d'où l'on conclura que

$$z^2 + y^2 = \phi xy.$$

484. Nous terminerons ce que nous avons à dire sur les équations différentielles partielles du premier ordre, par la solution de ce problème : *Une équation qui contient une fonction arbitraire d'une ou de plusieurs variables étant donnée, trouver l'équation différentielle partielle qui l'a produite.*

Supposons donc que l'on ait

$$z = F(x^2 + y^2);$$

nous ferons

$$x^2 + y^2 = u \dots (189),$$

et notre équation deviendra

$$z = Fu;$$

la différentielle de Fu devant être, en général, une fonction de u multipliée par du , nous pourrions écrire

$$dz = \phi u du;$$

si nous prenons la différentielle de z , par rapport à x seulement, c'est-à-dire en regardant y comme une constante, nous devons prendre aussi la différentielle de u dans la même hypothèse; par conséquent, en divisant par dx l'équation précédente, nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = \phi u \frac{du}{dx} \dots (190);$$

si nous regardons ensuite x comme constant, et y comme variable, nous trouverons, par un procédé analogue,

$$\frac{dz}{dy} = \phi u \frac{du}{dy} \dots (191);$$

les valeurs des coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui entrent dans les équations (190) et (191), s'obtiendront en différenciant successivement l'équation (189), par rapport à x et à y , ce qui nous donnera

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{du}{dy} = 2y;$$

substituant ces valeurs dans les équations (190) et (191), nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = 2x\phi u, \quad \frac{dz}{dy} = 2y\phi u;$$

éliminant ϕu entre ces équations, nous trouverons enfin

$$y \frac{dz}{dx} = x \frac{dz}{dy}.$$

485. Prenons encore pour exemple l'équation

$$z^2 + 2ax = F(x - y);$$

faisant

$$x - y = u \dots (192),$$

cette équation devient

$$z^2 + 2ax = Fu;$$

et en différenciant, on a

$$d(z^2 + 2ax) = \phi u du;$$

prenant, par rapport à x , la différentielle indiquée, nous regarderons z comme variable, en vertu de x qui y est contenu; et divisant par dx , nous aurons

$$2z \frac{dz}{dx} + 2a = \phi u \frac{du}{dx} \dots (193);$$

opérant d'une manière analogue, par rapport à y , en regardant z comme une fonction qui ne varie qu'à cause de y , et divisant par dy , nous trouverons

$$xz \frac{dz}{dy} = \phi u \frac{du}{dy} \quad (194);$$

pour éliminer les coefficients différentiels de du , l'équation (192) nous donne

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{du}{dy} = -1;$$

substituant ces valeurs dans les équations (193) et (194), nous aurons

$$xz \frac{dz}{dx} + az = \phi u, \quad xz \frac{dz}{dy} = -\phi u,$$

éliminant ϕu entre ces équations, nous obtiendrons

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} + \frac{a}{z} = 0.$$

Des équations différentielles partielles du second ordre.

486. Une équation différentielle partielle du second ordre, dans laquelle z est une fonction de deux variables x et y , doit toujours contenir un ou plusieurs des coefficients différentiels $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, indépendamment des coefficients différentiels du premier ordre qu'elle peut renfermer.

487. Nous nous bornerons à intégrer les plus simples des équations différentielles partielles du second ordre, et nous commencerons par celle-ci :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0;$$

multipliant par dx , et intégrant par rapport à x , nous ajouterons à l'intégrale une constante arbitraire fonction de y , et nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = \phi y;$$

multipliant de nouveau par dx , et désignant par ψy une fonction de y , qu'on doit ajouter à l'intégrale, nous trouverons

$$z = x\phi y + \psi y.$$

488. Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = P,$$

dans laquelle P est une fonction de x et de y ; en opérant comme dans l'intégration précédente, nous trouverons d'abord

$$\frac{dz}{dx} = \int P dx + \phi y;$$

une seconde intégration nous donnera

$$z = \int [\int P dx + \phi y] dx + \psi y.$$

489. On intégrerait de la même manière

$$\frac{d^2z}{dy^2} = P,$$

et l'on trouverait

$$z = \int [\int P dy + \phi x] dy + \psi x.$$

490. L'équation

$$\frac{d^2z}{dydx} = P.$$

s'intégrerait d'abord par rapport à l'une des variables, et ensuite par rapport à l'autre, ce qui donnerait

$$z = \int [\int P dx + \phi y] dy + \phi x.$$

491. En général, on traitera de la même manière l'une des équations

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = P, \quad \frac{d^2 z}{dx dy^{n-1}} = Q, \quad \frac{d^2 z}{dx^2 dy^{n-1}} = R, \text{ etc.,}$$

dans lesquelles P , Q , R , etc., sont des fonctions de x et de y , ce qui donnera lieu à une suite d'intégrations qui introduiront chacune une fonction arbitraire dans l'intégrale.

492. Après les équations que nous venons de considérer, l'une des plus faciles à intégrer est celle-ci :

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + P \frac{dz}{dy} = Q;$$

par P et par Q nous désignons toujours deux fonctions de x et de y . Faisant $\frac{dz}{dy} = u$, nous transformerons cette équation en

$$\frac{du}{dy} + Pu = Q \dots (195).$$

Pour intégrer, nous regarderons x comme constant, et alors cette équation ne renfermera que deux variables y et u , et sera de même forme que l'équation

$$dy + Py dx = Q dx \dots (196),$$

traitée art. 385, et dont l'intégrale, page 277, est

$$y = e^{-\int P dx} [\int Q e^{\int P dx} dx + C] \dots (197);$$

comparant donc les équations (195) et (195'), nous aurons

$$y = u, \quad x = y;$$

substituant ces valeurs dans la formule (197), et changeant C en ϕx , nous obtiendrons

$$u = e^{-\int P dy} \left[\int Q e^{\int P dy} dy + \phi x \right];$$

mettant cette valeur de u dans l'équation $\frac{dz}{dy} = u$, multipliant par dy , et intégrant, on trouvera

$$z = \int \left[e^{-\int P dy} \left(\int Q e^{\int P dy} dy + \phi x \right) \right] dy + \psi x.$$

493. On intégrerait par le même moyen les équations

$$\frac{d^2 z}{dx dy} + P \frac{dz}{dx} = Q, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

dans lesquelles P et Q représentent des fonctions de x , et à cause du diviseur $dx dy$, on sent que la valeur de z ne renfermerait pas des fonctions arbitraires de la même variable.

De la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles du premier ordre.

494. Les fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles, doivent se déterminer par des conditions qui tiennent à la nature des problèmes qui ont donné lieu à ces équations, problèmes qui la plupart appartiennent à des questions physico-mathématiques. Ne voulant point nous écarter de notre sujet, nous nous bornerons à des considérations purement analy-

tiques, et nous chercherons d'abord quelles sont les conditions renfermées dans l'équation

$$\frac{dz}{dx} = a \dots (198).$$

495. Dès que z est une fonction de x et de y , cette équation peut être regardée comme celle d'une surface. Cette surface, d'après la nature de son équation, jouit de la propriété suivante, que $\frac{dz}{dx}$ doit toujours être une quantité con-

stante. Il suit de là que toute section EF (fig. 87); de cette surface faite par un plan CD, parallèle à celui des x, z , est une ligne droite. En effet, quelle que soit la nature de cette section, si on la partage en un nombre infini de parties mm' , $m'm''$, $m''m'''$, etc., ces parties, vu leur peu d'étendue, pourront être regardées comme des lignes droites, et représenteront les élémens de la section; l'un de ces élémens mm' faisant, avec une parallèle mn à l'axe des abscisses, un angle dont la tangente trigonométrique est représentée par $\frac{dz}{dx}$, comme cet angle est constant, il s'ensuit que tous les angles $m'mn$, $m''m'n'$, $m'''m''n''$, etc., formés par les élémens de la courbe, avec des parallèles mn , $m'n'$, $m''n''$, etc., à l'axe des abscisses, seront tous égaux; ce qui prouve que la section EF est une ligne droite.

496. On parviendrait au même résultat en considérant l'intégrale de l'équation $\frac{dz}{dx} = a$, que nous avons vu être, art. 464.

$$z = ax + cy \dots (199);$$

car, pour tous les points de la surface qui sont dans le plan CD, l'ordonnée est égale à une constante c , représentée

Fig. 87. dans la figure 87, par AB; remplaçant donc cy par φc , et faisant $\varphi c = C$, l'équation (199) deviendra

$$z = ax + C \dots (200);$$

cette équation étant celle d'une droite, appartiendra à la section EF qui, par conséquent, sera une droite.

497. La même chose ayant lieu par rapport aux autres plans sécans, qu'on mènerait parallèlement à celui des x, z , concluons que tous ces plans couperont la surface suivant des lignes droites, qui seront parallèles, puisqu'elles formeront chacune, avec une parallèle à l'axe des x , un angle dont la tangente trigonométrique sera a .

498. Si maintenant nous faisons $x = 0$, l'équation (199) se réduira à $z = \phi y$, et sera celle d'une courbe GHK tracée sur le plan des y, z ; cette courbe renfermant tous les points de la surface, dont les coordonnées sont $x = 0$, rencontrera le plan CD en un point m (fig. 87), qui aura pour l'une de ses coordonnées $x = 0$; et puisqu'on a aussi $y = AB = c$, la troisième coordonnée, en vertu de l'équation (200), sera $z = C$, valeur représentée dans la figure par Bm ; ce que nous disons du plan CD pouvant s'appliquer à tous les autres plans qui lui sont parallèles, il en résulte que par tous les points de la courbe dont $z = \phi y$ est l'équation, et qui est tracée sur le plan des y, z , partiront des droites parallèles à l'axe des x . Voilà tout ce que nous ont donné les équations (198) et (199); et comme cette condition est toujours remplie, quelle que soit la figure de la courbe dont $z = \phi y$ est l'équation, on voit que cette courbe est arbitraire.

499. Il suit de ce qui précède, que la courbe GHK, dont $z = \phi y$ est l'équation, peut être composée d'arcs de différentes courbes, qui se joignent les uns aux autres (*), comme

(*) Dans ce cas, la courbe sera déterminée à l'aide de plusieurs équations, de manière que la première donnera la valeur d'une variable x , par exemple, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$; la seconde la donnera depuis $x = b$ jusqu'à $x = c$, et ainsi de suite.

dans la figure 88, ou qui laissent entre eux des interruptions, en certaines parties, comme dans la figure 89. Dans le premier cas, la courbe est discontinue, et dans le second elle est discontiguë. On peut remarquer que dans ce dernier

Fig. 89. cas, deux ordonnées différentes PM et PN (fig. 89) correspondent à la même abscisse AP; enfin, il est possible que sans être discontiguë, la courbe soit composée d'une suite infinie d'arcs infiniment petits, qui appartiennent chacun à des courbes différentes; dans ce cas, la courbe est irrégulière comme seraient, par exemple, des traits de plume que l'on tracerait au hasard; mais de quelque manière que soit formée la courbe dont l'équation est $z = \phi y$, il suffira pour construire la surface, de faire mouvoir une droite toujours parallèlement à elle-même, avec cette condition, que son point m parcoure la courbe GHK dont $z = \phi y$ est l'équation, et qui est tracée au hasard sur le plan des y, z .

500. Si, au lieu de l'équation $\frac{dz}{dx} = a$, nous avons celle-ci : $\frac{dz}{dx} = X$, dans laquelle X fût une fonction de x ,

Fig. 87. alors en menant un plan CD (fig. 87), parallèle à celui des x, z , la surface serait coupée suivant une certaine section EF, qui ne serait plus une ligne droite, comme dans le cas précédent. En effet, pour tout point m' , pris sur cette section, la tangente trigonométrique de l'angle $n'm'm''$ formé par le prolongement de l'élément $m'm''$ de la section, avec une parallèle à l'axe des x , sera égale à une fonction X de l'abscisse x de ce point; et comme l'abscisse x est différente pour chaque point, il s'ensuit que l'angle $n'm'm''$ sera différent à chaque point de la section, ce qui nous montre que EF ne sera plus, comme précédemment, une ligne droite. La surface se construira de même que dans le problème précédent, en faisant mouvoir la section EF parallèlement à elle-même, de manière que son point m

touche continuellement la courbe GHK dont l'équation est $z = \phi y$.

501. Supposons maintenant que, dans l'équation précédente, au lieu de $X = 0$, on ait une fonction P de x et de y ; l'équation $\frac{dz}{dx} = P$, contenant trois variables, appartiendra encore à une surface courbe. Si nous coupons cette surface par un plan parallèle à celui des x, z , nous aurons une section dans laquelle y sera constant; et comme dans tous ses points, $\frac{dz}{dx}$ égalera une fonction de la variable x , il faudra donc, ainsi que dans le cas précédent, que cette section soit une courbe. L'équation $\frac{dz}{dx} = P$ étant intégrée, nous aurons, pour celle de la surface,

$$z = \int P dx + \phi y;$$

si dans cette équation nous donnons successivement à y les valeurs croissantes y', y'', y''', y^{iv} , etc., et que nous appelions P', P'', P''', P^{iv} , etc., ce que devient alors la fonction P , nous aurons les équations

$$\left. \begin{aligned} z &= \int P' dx + \phi y', & z &= \int P'' dx + \phi y'' \\ z &= \int P''' dx + \phi y''', & z &= \int P^{iv} dx + \phi y^{iv}, \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \dots (201);$$

et l'on voit que ces équations appartiendront à des courbes de même nature, mais différentes de forme, puisque les valeurs de la constante y n'y sont pas les mêmes. Ces courbes ne seront autre chose que les sections de la surface par des plans parallèles à celui des x, z , et, en rencontrant le plan des y, z , elles formeront une courbe dont l'équation s'obtiendra en égalant à zéro la valeur de x dans celle de la surface. Appelons $\int P dx$, ce que devient Y ; dans ce cas, nous aurons

$$z = Y + \phi y \dots (202);$$

et l'on voit qu'à cause de ϕy , la courbe, déterminée par

cette équation, doit être arbitraire; ainsi, ayant tracé à volonté (fig. 90) la courbe QRS sur le plan des y, z , si nous représentons par RL la section dont $z = \int P' dx + \phi y'$ est l'équation, on fera mouvoir cette section, en tenant son extrémité R toujours appliquée à la courbe QRS; mais de manière que, dans ce mouvement, cette section RL prenne les formes successives déterminées par les équations (201), et l'on construira la surface à laquelle appartiendra l'équation $\frac{dz}{dx} = P$.

502. Considérons enfin l'équation générale

$$\frac{dz}{dx} + M \frac{dz}{dy} + N = 0,$$

dont l'intégrale est $U = \phi V$, art. 482. Dès que nous avons $U = a$ et $V = b$, ces équations existant chacune entre trois coordonnées, nous pouvons les regarder comme celles de deux surfaces; et puisque ces coordonnées sont communes, elles doivent appartenir à la courbe d'intersection de ces deux surfaces. Cela posé, a et b étant des constantes arbitraires, si dans $U = a$ nous donnons à x et à y les valeurs x' et y' , nous obtiendrons pour z une fonction de x' , de y' et de a , qui déterminera un point de la surface dont $U = a$ est l'équation. Ce point quelconque variera de position si nous donnons successivement diverses valeurs à la constante arbitraire a , ce qui revient à dire qu'en faisant varier a , nous ferons passer la surface dont $U = a$ est l'équation, par un nouveau système de points. Ce que nous disons de $U = a$, pouvant s'appliquer à $V = b$, concluons que la courbe d'intersection des deux surfaces changera continuellement de position, et par conséquent décrira une surface courbe, dans laquelle a et b pourront être considérés comme deux coordonnées; et puisque la relation $a = \phi b$, qui lie entre elles ces deux coordonnées, est arbitraire, on sent que la détermina-

tion de la fonction ϕ revient au problème de faire passer une surface par une courbe tracée arbitrairement.

503. Pour montrer comment ces sortes de problèmes peuvent conduire à des conditions analytiques, examinons quelle est la surface dont l'équation est

$$y \frac{dz}{dx} = x \frac{dz}{dy} \dots (203).$$

Nous avons vu, art. 473, que cette équation avait pour intégrale

$$z = \phi(x^2 + y^2) \dots (204);$$

réciroquement on tire de cette intégrale

$$x^2 + y^2 = \phi z;$$

si l'on coupe la surface par un plan parallèle à celui des x, y , la section aura pour équation

$$x^2 + y^2 = \phi c;$$

et en représentant par a^2 la constante ϕc , on aura

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Cette équation appartient au cercle; par conséquent, la surface jouira de cette propriété, que toute section faite par un plan parallèle à celui des x, y , sera un cercle.

504. Cette propriété est encore indiquée par l'équation (203), car, en vertu de l'article 24, on en tire

$$x = y \frac{dy}{dx}.$$

Cette équation nous apprend que la sous-normale doit être toujours égale à l'abscisse, ce qui est la propriété du cercle.

505. L'équation (204) ne nous disant donc autre chose,

si ce n'est que toutes les sections parallèles au plan des x, y sont des cercles, il s'ensuit que la loi suivant laquelle les rayons de ces sections doivent s'augmenter, n'est pas comprise dans l'équation (204); et que, par conséquent, toute surface de révolution satisfera au problème; car on sait que dans ces sortes de surfaces, les sections parallèles au plan des x, y sont toujours des cercles, et il n'est pas besoin de dire que la génératrice qui, dans une révolution, décrit la surface, peut être une courbe discontinue, discontiguë, régulière ou irrégulière.

506. Cherchons donc la surface pour laquelle cette génératrice serait une parabole AN (fig. 91), et supposons que, dans cette hypothèse, la surface soit coupée par un plan AB, qui passerait par l'axe des z ; la trace de ce plan sur celui des x, y sera une droite AL qui, menée par l'origine, aura pour équation $y = ax$; si nous représentons par t l'hypoténuse AQ du triangle rectangle APQ, construit sur le plan des x, y , nous aurons

$$t^2 = x^2 + y^2;$$

mais t étant l'abscisse AQ de la parabole AN, dont QM = z est l'ordonnée, nous avons par la nature de cette courbe

$$t^2 = bz;$$

mettant pour t^2 sa valeur $x^2 + y^2$, il nous viendra

$$z = \frac{1}{b}(y^2 + x^2) \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{b}(a^2 x^2 + x^2) = \frac{1}{b} x^2 (a^2 + 1);$$

et en faisant $\frac{1}{b}(a^2 + 1) = m$, nous obtiendrons

$$z = mx^2;$$

de sorte que la condition prescrite dans l'hypothèse où la génératrice est une parabole, est que l'on doive avoir

$$z = mx^2 \quad \text{lorsque} \quad y = ax.$$

507. Cherchons maintenant à déterminer, au moyen de ces conditions, la fonction arbitraire qui entre dans l'équation (204). Pour cet effet, nous représenterons par U la quantité $x^2 + y^2$ qui est affectée du signe ϕ , et l'équation (204) deviendra

$$z = \phi U \dots (205),$$

et nous aurons les trois équations

$$x^2 + y^2 = U, \quad y = ax, \quad z = mx^2.$$

Au moyen des deux premières nous éliminerons y , et nous obtiendrons la valeur de x^2 qui, étant mise dans la troisième, nous donnera

$$z = m \frac{U}{a^2 + 1},$$

équation qui se réduit à

$$z = \frac{1}{b} U;$$

par ce qu'on a vu que nous avions supposé $\frac{1}{b}(a^2 + 1) = m$; la valeur de z étant substituée dans l'équation (205), la changera en

$$\phi U = \frac{1}{b} U;$$

mettant la valeur de U dans cette équation, nous trouverons

$$\phi(x^2 + y^2) = \frac{1}{b}(x^2 + y^2),$$

et l'on voit que la fonction est déterminée; substituant cette valeur de $\phi(x^2 + y^2)$ dans l'équation (204), nous aurons pour l'intégrale cherchée,

$$z = \frac{1}{b}(x^2 + y^2);$$

équation qui jouit de la propriété requise, puisque l'hypothèse de $y = ax$ nous donne

$$z = mx^a.$$

508. Ce procédé est général; car supposons que les conditions qui doivent déterminer la constante arbitraire, soient que l'intégrale donne $F(x, y, z) = 0$, lorsqu'on a $f(x, y, z) = 0$, nous nous procurerons une troisième équation en égalant à U la quantité qui est précédée de ϕ , et alors, en éliminant successivement deux des variables x, y, z , on obtiendra chacune de ces variables en fonction de U ; mettant ces valeurs dans l'intégrale, on parviendra à une équation dont le premier membre sera ϕU , et dont le second membre sera une expression composée en U ; remettant la valeur de U en fonction des variables, la fonction arbitraire se trouvera déterminée.

Des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles du second ordre.

509. Les équations différentielles partielles du second ordre, conduisent à des intégrales qui renferment deux fonctions arbitraires; la détermination de ces fonctions revient à faire passer la surface par deux courbes qui peuvent être discontinues et discontinuës. Pour en donner un exemple, prenons l'équation $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$: on a vu art. 487, que l'intégrale de cette équation était

$$z = x\phi y + \psi y \dots (206).$$

Fig. 52. Soient Ax, Ay et Az (fig. 52), les axes coordonnés; si l'on mène un plan KL parallèlement à celui des x, z , la section de la surface, par ce plan, sera une ligne droite;

car, pour tous les points de cette section, y étant égal à Ap , si nous représentons Ap par une constante c , les quantités ϕy et ψy deviendront ϕc et ψc , et par conséquent pourront être remplacées par deux constantes a et b , de sorte que l'équation (206) deviendra

$$z = ax + b \dots (207),$$

et sera celle de la section faite par le plan KL .

510. Pour connaître le point où cette section rencontre le plan des y, z , faisons $x = 0$, l'équation (206) nous donne dans cette hypothèse, $z = \psi y$, ce qui nous indique une courbe amb , tracée sur le plan des y, z . Il nous serait facile de démontrer, comme dans l'art. 498, que la section rencontre la courbe amb en un point m ; et comme cette section est une ligne droite, il ne s'agit, pour en déterminer la position, que de trouver un second point par lequel passe cette ligne. Pour cet effet, observons que lorsque x est égal à zéro l'équation (206) se réduit à

$$z = \psi y,$$

tandis que lorsque x est égal à l'unité, la même équation se réduit à

$$z = \phi y + \psi y;$$

faisant, comme précédemment, $y = Ap = c$, ces deux valeurs de z deviennent

$$z = b, \quad z = a + b,$$

et déterminent deux points m et r pris sur la même section mr que nous avons vue être en ligne droite. Pour construire ces points on opérera de la manière suivante : on tracera arbitrairement sur le plan des y, z la courbe amb , et par le point p , où le plan sécant KL rencontre l'axe des y , on élèvera la perpendiculaire $pm = b$, qui sera une ordonnée à la courbe; on prendra ensuite à l'intersection HL du plan

sécant et de celui des x, y , la partie pp' égale à l'unité, et par le point p' on mènera un plan parallèle à celui des y, z , et dans ce plan on construira la courbe $a'm'b'$, sur le modèle de la courbe amb , et de manière qu'elle soit semblablement disposée; alors l'ordonnée $m'p'$ sera égale à mp ; et si l'on prolonge $m'p'$ d'une quantité arbitraire $m'r$, qui représentera a , on déterminera le point r de la section.

Si l'on prolonge ensuite, par le même procédé, toutes les ordonnées de la courbe $a'm'b'$, on construira une nouvelle courbe $a'rb'$ qui sera telle, qu'en menant par cette courbe et par amb , un plan parallèle à celui des x, z , les deux points où les courbes seront rencontrées appartiendront à la même section de la surface.

511. Il suit de ce qui précède, que la surface peut être construite, en faisant mouvoir la droite mr , de manière qu'elle touche continuellement les deux courbes $amb, a'rb'$.

512. Cet exemple suffit pour faire entrevoir comment la détermination des fonctions arbitraires, qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles du second ordre revient à faire passer la surface par deux courbes qui, ainsi que les fonctions arbitraires* qui servent à les construire, peuvent être discontinues, discontiguës, régulières ou irrégulières.

FIN.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE (page 33).

Sur la manière de trouver le développement du logarithme de $x + h$.

Voici un des procédés employés pour trouver le logarithme de $x + h$. On cherchera d'abord le développement de $\log(1+x)$ de la manière suivante : on égalera $\log(1+h)$ à une suite de termes ordonnés suivant les puissances de x , en observant préliminairement que dans cette suite il ne peut y avoir un terme indépendant de x . En effet, si l'on avait

$$\log(1+x) = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.},$$

cette équation devant avoir lieu, quel que soit x , il en résulterait qu'en faisant $x=0$, on trouverait $A = \log 1 = 0$; ainsi nous écrirons

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} \dots (1);$$

changeant x en z , on aura pareillement

$$\log(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.};$$

z étant arbitraire, nous pourrions supposer qu'il y ait entre x et z la relation

$$(1+x)^2 \text{ ou } 1+2x+x^2 = 1+z;$$

tirant de cette équation la valeur de z , et la substituant dans l'équation (1), nous trouverons

$$\log(1+x)^2 = A(2x+x^2) + B(2x+x^2)^2 + C(2x+x^2)^3 + \text{etc.};$$

ou en développant et ordonnant par rapport à x ,

$$\log(1+x)^2 = 2Ax + \frac{A}{+4B} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4B \\ +8C \\ +12C \\ +16D \end{array} \right\} x^3 + \frac{B}{+12C} \left\{ \begin{array}{l} x^4 + \text{etc.} \end{array} \right\} \dots (2)$$

D'une autre part, la propriété des logarithmes étant exprimée dans cette équation $\log a^n = n \log a$, nous avons

$$\log(1+x)^2 = 2 \log(1+x),$$

ou, en mettant pour $1+x$ son développement (1),

$$\log(1+x)^2 = 2(Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.});$$

substituant cette valeur de $\log(1+x)^2$ dans le premier membre de l'équation (2), nous aurons une équation qui aura lieu, quel que soit x ; par conséquent, en égalant entre eux les termes affectés des mêmes puissances de x , nous obtiendrons

$$2A = 2A, \quad A + 4B = 2B, \quad 4B + 8C = 2C, \text{ etc.};$$

d'où nous tirerons

$$B = -\frac{A}{2}, \quad C = -\frac{2B}{3} = \frac{A}{3}, \text{ etc.};$$

substituant ces valeurs, nous trouverons

$$\log(1+x) = A \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \text{etc.} \right) + C.$$

Quand $x = 0$, $\log 1 = 0 = C$; donc il n'y a point de constante à ajouter; faisons $x = \frac{h}{x}$, nous aurons

$$\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \quad \text{ou} \quad \log\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

ou

$$\log(x+h) - \log x = A \left(\frac{h}{x} + \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} + \text{etc.} \right);$$

et en divisant par h ,

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = A \left(\frac{1}{x} + \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} + \text{etc.} \right).$$

Passant à la limite, nous trouverons $\frac{d \log x}{dx} = \frac{A}{x}$; par conséquent la différentielle de $\log x$ sera $A \frac{dx}{x}$; on voit que la constante A n'est autre chose que le module.

NOTE SECONDE (page 162).

Sur le principe fondamental de la méthode des coefficients indéterminés.

On peut démontrer de la manière suivante que lorsqu'une équation telle par exemple que

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \dots (3),$$

à lieu quel que soit x , il faut nécessairement que chacun des coefficients A, B, C, D, E soit nul; en effet, puisque x peut avoir une valeur quelconque, faisons $x=0$, et l'équation (3) se réduira à $E=0$; et comme E est indépendant de x , E est donc encore nul lorsque x n'est pas zéro; d'où il suit que l'équation (3) se réduit à

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx = 0;$$

supprimant le facteur commun x , il restera

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0;$$

appliquant à cette équation le même raisonnement que nous avons employé à l'égard de l'équation (3), nous prouverons que D est nul; et en continuant ainsi, nous trouverons successivement que les autres coefficients le sont aussi.

NOTE TROISIÈME (page 241).

Sur le développement des puissances des cosinus et des sinus en fonction des arcs multiples.

Il existe une formule très élégante, qui donne la valeur d'une puissance d'un cosinus en fonction des quantités $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, etc., et une formule analogue a lieu aussi pour les sinus : il importe de les faire connaître; mais avant que de nous occuper de cet objet, nous commencerons par donner la démonstration d'une formule imaginaire remarquable, dont nous allons bientôt faire usage.

Soit donc l'expression $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi$, qui est le produit des deux facteurs $\cos \phi + \sin \phi \sqrt{-1}$, et $\cos \phi - \sin \phi \sqrt{-1}$; si nous faisons $\cos \phi + \sin \phi \sqrt{-1} = F\phi$, nous aurons en différenciant,

$$\frac{dF\phi}{d\phi} = -\sin \phi + \cos \phi \sqrt{-1};$$

cette équation étant multipliée par $-\sqrt{-1}$, devient

$$-\frac{dF\phi}{d\phi} \sqrt{-1} = \sin \phi \sqrt{-1} + \cos \phi;$$

et puisque par hypothèse son second membre est égal à $F\phi$, nous avons

$$-\frac{dF\phi}{d\phi} \sqrt{-1} = F\phi,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dF\phi}{F\phi} = -\frac{d\phi}{\sqrt{-1}} = -\frac{d\phi}{\sqrt{-1}} \times \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = d\phi \sqrt{-1};$$

et en intégrant, on trouve

$$\log F\phi = \phi \sqrt{-1} = (\phi \sqrt{-1}) \log e = \log e^{\phi \sqrt{-1}};$$

passant aux nombres, on a

$$F\phi = e^{\phi \sqrt{-1}},$$

et en mettant pour $F\phi$ sa valeur, on obtient

$$\cos \phi + \sin \phi \sqrt{-1} = e^{\phi \sqrt{-1}} \dots (4).$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit ϕ , on pourra changer ϕ en $m\phi$, et l'on aura encore

$$\cos m\phi + \sin m\phi \sqrt{-1} = e^{m\phi \sqrt{-1}}.$$

Il existe une autre expression de cette puissance imaginaire de e , car l'équation (4) étant élevée à la puissance m , nous donne

$$(\cos \phi + \sin \phi \sqrt{-1})^m = e^{(m\phi \sqrt{-1})} = e^{m\phi \sqrt{-1}}.$$

Les seconds membres de ces dernières équations étant les mêmes, on a, en égalant les premiers,

$$(\cos \phi + \sin \phi \sqrt{-1})^m = \cos m\phi + \sin m\phi \sqrt{-1} \dots (5);$$

si l'on fait $\phi = -\phi$ dans les équations (4) et (5), ces équations deviendront

$$\cos -\phi + \sin -\phi \sqrt{-1} = e^{-\phi \sqrt{-1}} \dots (6),$$

$$(\cos -\phi + \sin -\phi \sqrt{-1})^m = \cos -m\phi + \sin -m\phi \sqrt{-1} \dots (7).$$

Or, si ϕ est représenté par l'arc AD (fig. 61), $-\phi$ le sera par AD'; et comme ces arcs ont les mêmes cosinus et des sinus de signes contraires, on aura

$$\cos -\phi = \cos \phi, \quad \sin -\phi = -\sin \phi;$$

on prouverait de même que

$$\cos -m\phi = \cos m\phi, \quad \text{et que} \quad \sin -m\phi = -\sin m\phi;$$

substituant ces valeurs dans les équations (6) et (7), on obtiendra

$$\cos \phi - \sin \phi \sqrt{-1} = e^{-\phi} \sqrt{-1} \dots (8),$$

$$(\cos \phi - \sin \phi \sqrt{-1})^m = \cos m\phi - \sin m\phi \sqrt{-1} \dots (9).$$

Cherchons maintenant le développement de $\cos^m x$ en fonction des arcs multiples de x , et sans employer les puissances des sinus et des cosinus. Pour cet effet, soient

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = u \dots (10),$$

$$\cos x - \sin x \sqrt{-1} = v \dots (11);$$

ces équations étant ajoutées, donnent

$$\cos x = \frac{1}{2} (u + v),$$

et par conséquent

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} (u + v)^m, \quad \cos^m x = \frac{1}{2^m} (v + u)^m;$$

développant ces binomes par la formule usitée, on obtient

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} \left[u^m + m u^{m-1} v + m \frac{(m-1)}{2} u^{m-2} v^2 + \text{etc.} \right],$$

$$\cos^m x = \frac{1}{2^m} \left[v^m + m v^{m-1} u + m \frac{(m-1)}{2} v^{m-2} u^2 + \text{etc.} \right];$$

ajoutant ces équations, on trouve

$$\begin{aligned} 2^{m+1} \cos^m x &= u^m + v^m + m u v (u^{m-2} + v^{m-2}) \\ &+ m \frac{(m-1)}{2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \text{etc.} \dots (12). \end{aligned}$$

On tire des formules (10) et (11)

$$u^m = (\cos x + \sin x \sqrt{-1})^m, \quad v^m = (\cos x - \sin x \sqrt{-1})^m;$$

mettant dans les seconds membres de ces équations leurs valeurs données par les formules (5) et (9), on a

$$\begin{aligned} u^m &= \cos mx + \sin mx \sqrt{-1}, \\ v^m &= \cos mx - \sin mx \sqrt{-1} \dots (13); \end{aligned}$$

donc $u^m + v^m = 2\cos mx$, et $u^m v^m = 1$;

et par conséquent

$$\begin{array}{lll} \dots \dots \dots & \dots \dots & uv = 1, \\ u^{m-2} + v^{m-2} = 2\cos(m-2)x, & u^{m-2}v^{m-2} = 1, \\ u^{m-4} + v^{m-4} = 2\cos(m-4)x, & u^{m-4}v^{m-4} = 1, \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (12), on trouvera

$$\begin{aligned} \cos^m x &= \frac{1}{2^{m+1}} [2\cos mx + 2m\cos(m-2)x \\ &+ 2m \frac{(m-1)}{1.2} \cos(m-4)x + \text{etc.}] \dots (14). \end{aligned}$$

Ce développement provenant de celui de $(u+v)^m$, contient $m+1$ termes; si l'on fait successivement $m=2$, $m=3$, $m=4$, etc., et que l'on change les cosinus d'arcs négatifs en positifs, en vertu de l'équation $\cos -\phi = \cos \phi$, on formera le tableau suivant :

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}, \\ \cos^3 x &= \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4}, \\ \cos^4 x &= \frac{\cos 4x}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

On peut abrégér ces calculs, car les termes également distans des extrémités de la série, sont égaux. Pour le démontrer, nous remarquerons que les cosinus qui entrent

dans l'équation (14) étant

$$\cos mx, \cos(m-2)x, \cos(m-4)x, \cos(m-2 \times 3)x, \text{ etc.,}$$

ou plutôt

$$\begin{aligned} \cos mx, \cos(m-2 \times 1)x, \cos(m-2 \times 2)x, \\ \cos(m-2 \times 3)x, \text{ etc.,} \end{aligned}$$

en considérant les nombres qui suivent le signe $\times$ dans chaque terme de la série, on voit que l'un de ces nombres indique celui des termes précédens. Ainsi, le terme qui en a n avant lui, sera affecté de $\cos(m-2n)x$. A l'égard du terme qui en a n après lui, comme le nombre total des termes de la série est $m+1$, celui qui en a n après lui, tiendra le rang $m+1-n$, et par conséquent, aura $m-n$ termes avant lui; donc il renfermera l'expression

$$\cos[m-2(m-n)]x = \cos(-m+2n)x;$$

et comme nous avons vu qu'on avait le droit de changer le signe de l'arc dont on a le cosinus, on aura

$$\cos(-m+2n)x = \cos(m-2n)x;$$

donc les termes également distans des extrémités de la série, ont les mêmes cosinus; et comme ils ont aussi les mêmes coefficients (*), puisque ces coefficients sont ceux de la formule du binôme; il en résulte que ces termes sont égaux. Ainsi, lorsque m est impair le nombre $m+1$ des termes de la série sera pair, et il suffira de doubler les $\frac{m+1}{2}$ premiers termes, pour avoir la totalité des termes de la série; si m est pair, $m+1$ sera impair, alors on ajoutera au terme du milieu, le double de ceux qui le précéderont. Ce terme tiendra le rang $\frac{m}{2} + 1$ dans la série, et, par conséquent, il

(*) On peut le reconnaître en comparant le développement de $(a+b)^m$ à celui de $(b+a)^m$, écrit à rebours.

sera affecté de $\cos(m-m) = \cos 0 = 1$; donc il ne contiendra pas de cosinus.

Par un procédé analogue , on peut trouver le développement de $\sin^m x$. Pour cet effet , en retranchant l'équation (11) de l'équation (10), on trouve

$$2\sin x \sqrt{-1} = u - v ; \text{ donc } \sin x = \frac{u - v}{2\sqrt{-1}} ;$$

élevant les deux membres de cette équation à la puissance m , on aura

$$\sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} (u - v)^m ;$$

si m est égal à un nombre pair $2p$, on a

$$(u - v)^{2p} = [(u - v)^2]^p = [(v - u)^2]^p = (v - u)^{2p} ;$$

donc

$$(u - v)^m = (v - u)^m.$$

On développera les équations

$$\sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} (u - v)^m \text{ et } \sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} (v - u)^m,$$

et opérant comme nous l'avons fait ci-dessus , on trouvera

$$\sin^m x = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^m} \left[\cos m x - m \cos(m-2)x + m \frac{(m-1)}{1.2} \cos(m-4)x + \text{etc.} \right] ;$$

la quantité imaginaire $(2\sqrt{-1})^m$ disparaîtra du résultat , puisqu'elle est élevée à une puissance paire.

Si m est égal à un nombre impair $2p + 1$, on aura

$$\begin{aligned} (u - v)^{2p+1} &= (u - v)^{2p} \times (u - v) = (v - u)^{2p} \times -(v - u) \\ &= -(v - u)^{2p+1}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$(u - v)^m = -(v - u)^m,$$

et

$$\sin^m x = \frac{(u-v)^m}{(2\sqrt{-1})^m}, \quad \sin^m x = -\frac{(v-u)^m}{(2\sqrt{-1})^m} \dots (15);$$

développant $(u-v)^m$ et $(v-u)^m$, par la formule du binôme, et substituant ces développemens dans les équations (15), qu'on ajoutera, on aura

$$2 \sin^m x = \frac{1}{\sqrt{(2-1)^m}} \left[u^m - v^m - \frac{m}{1} uv (u^{m-1} - v^{m-1}) + \text{etc.} \right] \dots (16);$$

retranchant les équations (13) l'une de l'autre, multipliant ensuite entre elles ces mêmes équations, et observant que la seconde opération nous donne la somme des carrés de $\sin mx$ et de $\cos mx$, qui équivaut à l'unité, on trouvera

$$u^m - v^m = 2 \sin mx \sqrt{-1}, \quad u^m v^m = 1.$$

En opérant de la même manière que ci-dessus, on changera donc l'équation (16) en

$$\sin^m x = \frac{1}{2(2\sqrt{-1})^{m-1}} \left[\sin mx - \frac{m}{1} \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin(m-4)x + \text{etc.} \right].$$

Comme dans cette hypothèse m est impair, la puissance $m-1$, à laquelle la quantité $2\sqrt{-1}$ est élevée, est paire, ce qui fait évanouir l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

NOTE QUATRIÈME (page 271).

Sur la manière de déterminer les volumes des corps dont la surface peut être exprimée par une fonction d'une même variable.

Lorsque les solides ne sont pas de révolution, on peut quelquefois en déterminer le volume à l'aide d'une simple intégration, sans faire usage de la formule (85) page 270.

C'est ce que nous allons exécuter à l'égard de la pyramide ABCD (fig. 66). Pour cet effet, concevons une section GFE, parallèle à la base DCB, et du sommet A abaissons une perpendiculaire AH sur la base DCB; nommons x et h les parties AI et IH de cette perpendiculaire, comprises entre le point A et les plans DCB, GFE; l'aire du triangle GFE diminuant ou augmentant, selon la valeur que l'on donne à x , est une fonction de x ; on a donc

$$\text{GEF} = fx, \quad \text{DBC} = f(x + h).$$

Le volume de la pyramide AGFE étant aussi une fonction de x , nous pourrions supposer

$$\text{vol. AGEF} = \phi x, \quad \text{vol. ADBC} = \phi(x + h).$$

Or, il est évident que la pyramide tronquée GB, qui est la différence de ces volumes, sera moindre que le volume du prisme, qui a BCD pour base et h pour hauteur, et surpassera le volume du prisme, qui a EFG pour base et h pour hauteur. Le rapport de ces prismes est

$$\frac{f(x + h)h}{fx.h} = \frac{f(x + h)}{fx};$$

dans le cas de la limite, ce rapport devenant égal à l'unité, à plus forte raison le rapport qui existe entre le tronc de pyramide GB et l'un de ces prismes, sera alors égal à l'unité. Le volume du tronc de pyramide étant représenté par... $\phi(x + h) - \phi x$, le rapport de ce volume à celui du prisme de base FE est la base et h la hauteur, sera

$$\frac{\phi(x + h) - \phi x}{fx.h} = \frac{\frac{d\phi x}{dx} + \frac{d^2\phi x}{dx^2} \frac{h}{2} + \text{etc.}}{fx};$$

passant à la limite, nous aurons

$$\frac{d\phi x}{fx.d x} = 1; \quad \text{ou} \quad d\phi x = fx.d x \dots (17).$$

Par la méthode des infiniment petits, on serait parvenu au même résultat; car, en concevant la pyramide comme composée d'une infinité de tranches parallèles à sa base, chaque tranche pourrait être considérée comme un prisme dont fx serait la base et dx la hauteur; donc $fx \cdot dx$ est l'élément de la pyramide.

Pour déterminer maintenant le volume de la pyramide, soient B l'aire de sa base DBC , et A sa hauteur; nous aurons

$$B : fx :: A^3 : x^3;$$

donc

$$fx = \frac{Bx^3}{A^3};$$

substituant cette valeur dans l'équation (17), on trouvera

$$d\phi x = \frac{Bx^3}{A^3} dx,$$

et, en intégrant,

$$\phi x = \frac{Bx^4}{4A^3}.$$

Le volume $AGEF$, représenté par ϕx , s'évanouissant lorsque $x = 0$, il n'y a point de constante à ajouter; si l'on fait ensuite $x = A$, on aura, pour l'intégrale définie, l'expression $\frac{BA}{4}$, qui est celle du volume de la pyramide $ACBD$.

En général, si la section GFE , au lieu d'être un triangle, est une surface quelconque, pourvu que cette surface soit une fonction de x , on démontrera, comme nous l'avons fait pour la pyramide, que l'élément du solide a pour expression $fx \cdot dx$.

NOTE CINQUIÈME (page 272).

Sur la projection d'une surface plane.

Pour démontrer que la projection d'une surface plane sur

un plan, est égale au produit de cette surface, par le cosinus de son inclinaison; nommons γ l'angle de projection qu'une surface A fait avec une surface B; la surface A étant inclinée sur l'autre, la rencontrera nécessairement; plaçons l'axe des x à leur commune section, et supposons que les ordonnées y de la surface B soient perpendiculaires à cet axe; il est certain que toute ordonnée y de cette surface aura $y \cos \alpha$ pour projection sur l'autre; par conséquent, l'élément de la surface A étant représenté par $y dx$, article 348, celui de la surface B le sera par $y \cos \gamma dx$; prenant les intégrales, nous aurons

$$A = \int y dx; \quad B = \int y \cos \gamma dx = \cos \gamma \int y dx;$$

éliminant $\int y dx$ entre ces équations, nous trouverons

$$B = A \cos \gamma.$$

NOTE SIXIÈME (page 272).

Sur l'expression du cosinus de l'angle formé par deux plans, déterminée directement par un procédé nouveau.

* Proposons-nous de résoudre directement ce problème. Trouver le cosinus de l'inclinaison de deux plans. Soient DB, DC, CB (fig. 93) les traces d'un plan DBC sur les plans coordonnés, dont les axes rectangulaires sont dirigés suivant les droites AB, AC et AD; nommons AB, a ; AC, b ; AD, c ; et représentons par α , β , γ , les angles que le plan DBC forme, avec les plans des yz , des xz et des xy , les projections de la surface BCD sur ces plans étant, $\frac{bc}{2}$, $\frac{ac}{2}$, $\frac{ab}{2}$, nous aurons, d'après la note précédente,

$$DBC \cos \gamma = \frac{ab}{2}, \quad DBC \cos \alpha = \frac{bc}{2}, \quad DBC \cos \beta = \frac{ac}{2} \dots (18);$$

élevant au carré chacune de ces équations, si l'on en prend

la somme, et qu'on remplace par l'unité celle des carrés des cosinus, on obtiendra, après avoir tiré la racine carrée,

$$DBC = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2};$$

substituant cette valeur dans la première des équations (18), on en déduira

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}} \dots (19).$$

Soit maintenant $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan DBC; si l'on fait $y = 0$, on aura $Ax + Cz + D = 0$, pour l'équation de la trace DB; cette équation nous donne

$$z = -\frac{Ax}{C} - \frac{D}{C}.$$

Comme on sait que dans l'équation de la ligne droite mise sous cette forme, le coefficient de x représente la tangente trigonométrique de l'angle formé par la droite avec l'axe des x , nous aurons donc

$$\text{tang DBA} = -\frac{A}{C};$$

mais le triangle rectangle DBA nous donne

$$\text{tang DBA} = \frac{c}{a};$$

en comparant ces deux valeurs, on a

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{A^2}{C^2};$$

faisant ensuite $x = 0$, dans l'équation du plan, pour avoir celle de sa trace sur le plan des x, y , on trouve de même

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{B^2}{C^2}.$$

substituant ces valeurs dans l'équation (19), on obtient

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2}}}.$$

- Si l'on divise maintenant l'équation du plan par C, et qu'on la différencie successivement par rapport aux variables x et y, on trouvera

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{B}{C};$$

substituant ces valeurs dans celle de cos γ, on aura enfin

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

• NOTE SEPTIÈME (page 303).*

Sur la courbe à double courbure, qui peut être construite au moyen de deux équations entre trois variables.

Il est facile de prouver que les équations (122), p. 303, appartiennent à une courbe à double courbure. Pour cet effet, changeons les y en z et les z en y, afin de placer les axes coordonnés d'une manière plus commode pour notre démonstration; nous aurons les équations

$$z^2 + 2xy + y^3 = 0 \dots (20),$$

$$2x + 3y^2 - 2 = 0 \dots (21).$$

Si la première existait seule, on pourrait, par son moyen, construire une surface courbe. En effet, si par tous les points du plan des x, y, que nous supposons, comme à l'ordinaire, horizontal, nous élevons des perpendiculaires, les valeurs en seront déterminées au moyen de l'équa-

tion (20); et l'on sent que les extrémités de ces ordonnées z constitueront une surface courbe. Lorsque quelques-unes de ces ordonnées sont imaginaires, c'est un indice que la surface ne s'étend pas dans les endroits où subsistent ces ordonnées imaginaires.

Si maintenant nous avons égard à l'équation (21), nous établissons par cela même, entre x et y une relation qui assujétit les pieds des ordonnées z à être sur la courbe qui appartient à l'équation (21), et l'on voit que, dans ce cas, les extrémités des ordonnées z , ne forment plus une surface, mais une courbe. Le système de ces ordonnées z constitue alors une surface cylindrique, dont l'intersection avec le plan des x, y , est donnée par l'équation (21). C'est l'intersection de cette surface avec celle que détermine l'équation (21), qui forme la courbe dont nous venons de parler; et il est évident que cette courbe est à double courbure, puisqu'on sait que l'intersection de deux surfaces courbes forme une courbe à double courbure.

NOTE HUITIÈME (page 339).

Nouvelle démonstration concernant l'intégration des équations différentielles partielles.

On a vu, art. 482, que si en intégrant l'équation

$$\frac{dz}{dx} + M \frac{dz}{dy} + N = 0 \dots (22),$$

dans laquelle M et N sont des fonctions de x , de y et de z , on obtient deux intégrales $U = a$ et $V = b$, on a nécessairement $a = \phi b$. La démonstration de ce théorème étant très importante, nous avons cherché à lui donner le dernier degré de rigueur, de la manière suivante :

U et V étant des fonctions de x , de y et de z , les con-

stantes a et b peuvent être aussi considérées comme des fonctions de ces mêmes variables, en vertu des équations $U=a$ et $V=b$; par conséquent, si l'on différencie successivement ces équations, on aura

$$\left. \begin{aligned} da &= Xdx + Ydy + Zdz \\ db &= X'dx + Y'dy + Z'dz \end{aligned} \right\} \dots (23);$$

ces différentielles doivent être nulles, par la raison que a et b sont constantes; ainsi, les équations $da=0$, $db=0$, nécessitent celles-ci :

$$\left. \begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz &= 0 \\ X'dx + Y'dy + Z'dz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (24).$$

Si dans ces équations, divisées par dx , on substitue les valeurs de dz et de dy , tirées des équations

$$dz + Ndx = 0, \quad dy - Mdx = 0 \dots (25),$$

données page 333, on aura

$$X + YM - ZN = 0, \quad X' + Y'M - Z'N = 0;$$

on tirera de ces équations

$$M = \frac{ZX' - XZ'}{Z'Y - ZY'}, \quad N = \frac{X'Y - Y'X}{Z'Y - ZY'};$$

substituant ces valeurs de M et de N dans l'équation (22), on obtiendra

$$\frac{dz}{dx} + \frac{ZX' - XZ'}{Z'Y - ZY'} \frac{dz}{dy} + \frac{X'Y - Y'X}{Z'Y - ZY'} = 0 \dots (26);$$

les coefficients $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ se déduisent des équations (25), qui donnent

$$\frac{dz}{dx} = -N, \quad \frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dy} = -\frac{N}{M} \dots (27);$$

mettant ces valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$ dans l'équation (26), et faisant évanouir le dénominateur, on trouvera

$$-(Z'Y - ZY')N - (ZX' - XZ')\frac{N}{M} + X'Y - Y'X = 0 \dots (28);$$

les quantités X , Y , Z , qui entrent dans cette équation, ne sont pas toujours connues puisqu'elles ne doivent être données qu'en différenciant les équations $U = a$ et $V = b$. Cherchons donc à éliminer X , Y et Z de notre résultat. Pour cet effet, en regardant z comme une fonction de x de y , nous tirerons des équations (23)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= X + Z \frac{dz}{dx}, & \frac{db}{dx} &= X' + Z' \frac{dz}{dx}, \\ \frac{da}{dy} &= Y + Z \frac{dz}{dy}, & \frac{db}{dy} &= Y' + Z' \frac{dz}{dy}; \end{aligned}$$

mettant dans ces expressions les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et de $\frac{dz}{dy}$, données par les équations (27), et tirant les valeurs de X , de Y , de X' et de Y' , nous trouverons

$$\begin{aligned} X &= \frac{da}{dx} + ZN, & X' &= \frac{db}{dx} + Z'N, \\ Y &= \frac{da}{dy} + \frac{ZN}{M}, & Y' &= \frac{db}{dy} + \frac{Z'N}{M}; \end{aligned}$$

substituant ces valeurs de X , de Y , de X' et de Y' , dans l'équation (28), et réduisant, nous obtiendrons

$$\frac{da}{dx} \frac{db}{dy} = \frac{da}{dy} \frac{db}{dx} \dots (29).$$

Cette équation nous apprend que a est fonction de b ; et en effet, si nous avons $a = Fb$, en différenciant cette équation

tion, nous trouverons $da = \phi b db$, d'où nous tirerons

$$\frac{da}{dx} = \phi b \frac{db}{dx}, \quad \frac{da}{dy} = \phi b \frac{db}{dy};$$

éliminant ϕb , nous trouverons l'équation (29):

NOTE DERNIÈRE (page 219).

Sur l'intégration des fonctions rationnelles qui, dans leurs dénominateurs égales à zéro, contiennent des racines imaginaires et égales.

L'intégration des fractions rationnelles de cette espèce se réduisant à celle de la formule $\frac{Mdz}{(z^2 + z^2)^p}$, comme la manière dont nous avons intégré cette expression, page 219, est un peu compliquée, nous allons indiquer un procédé moins direct, mais qui est en usage pour parvenir promptement à ce but.

On supposera

$$\int \frac{dz}{(z^2 + z^2)^p} = \frac{Hz}{(z^2 + z^2)^{p-1}} + K \int \frac{dz}{(z^2 + z^2)^{p-1}} \dots (30),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int \frac{dz}{(z^2 + z^2)^p} = Hz(z^2 + z^2)^{1-p} + K \int \frac{dz}{(z^2 + z^2)^{p-1}};$$

différenciant on a

$$\frac{dz}{(z^2 + z^2)^p} = Hdz(z^2 + z^2)^{1-p} + H(1-p)(z^2 + z^2)^{-p} 2z dz + K \frac{dz}{(z^2 + z^2)^{p-1}},$$

ou

$$\frac{dz}{(z^2 + z^2)^p} = \frac{Hdz(z^2 + z^2)}{(z^2 + z^2)^p} + \frac{2H(1-p)z^2 dz}{(z^2 + z^2)^p} + K \frac{(z^2 + z^2) dz}{(z^2 + z^2)^p};$$

supprimant les facteurs communs, on trouve

$$1 = H(c^2 + z^2) + 2H(1-p)z^2 + K(c^2 + z^2),$$

égalant entre eux les coefficients de z^2 , et ceux qui en sont indépendans, on obtiendra

$$1 = Hc^2 + Kc^2, \quad H + 2(1-p)H + K = c;$$

ces valeurs donnent

$$H = \frac{1}{2(p-1)c^2}, \quad K = \frac{2p-3}{2(p-1)c^2};$$

H et K étant connus, on en substituera la valeur dans l'équation (30), et l'on aura

$$\int \frac{dz}{(c^2 + z^2)^p} = \frac{1}{2(p-1)c^2} \frac{z}{(c^2 + z^2)^{p-1}} + \frac{(2p-3)}{2(p-1)c^2} \int \frac{dz}{(c^2 + z^2)^{p-1}} \dots (31);$$

ainsi l'intégrale de $\frac{dz}{(c^2 + z^2)^p}$ dépendra d'une autre, dans laquelle l'exposant de la parenthèse sera moindre d'une unité. Si dans la formule (31) on suppose ensuite $p = p-1$;

on fera dépendre l'intégrale de $\frac{dz}{(c^2 + z^2)^{p-1}}$ de celle de

$\frac{dz}{(c^2 + z^2)^{p-2}}$, et en diminuant ainsi successivement l'exposant de la parenthèse d'une unité, on tombera sur $\int \frac{dz}{c^2 + z^2}$

dont l'intégrale est $\frac{1}{c} \arctan \left(\frac{z}{c} \right)$.

FIN DES NOTES.

De l'Imprimerie de M^{me} V^e COURCIER, rue du Jardin.

608830



Fig. 4



Fig. 5

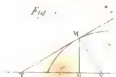


Fig. 6



M

m

m'

m''

m'''

m''''

m'''''

m''''''

m'''''''

m''''''''

m'''''''''

m''''''''''

m'''''''''''

m''''''''''''

m'''''''''''''

m''''''''''''''

m'''''''''''''''

m''''''''''''''''

m'''''''''''''''''

m''''''''''''''''''

m'''''''''''''''''''

m''''''''''''''''''''

m'''''''''''''''''''''

m''''''''''''''''''''''

m'''''''''''''''''''''''

m''''''''''''''''''''''''

m'''''''''''''''''''''''''

Fig. 7

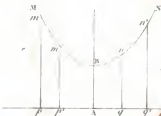


Fig. 8



Fig. 9

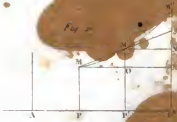


Fig. 10



Fig. 11

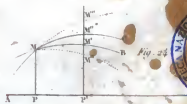






Fig. 29

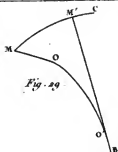


Fig. 30

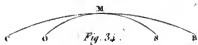
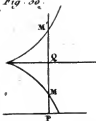


Fig. 33

Fig. 34

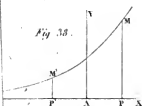


Fig. 36

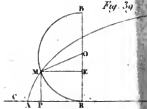


Fig. 38



Fig. 40



Fig. 42





